

УДК 517.538.5

МАТЕМАТИКА

Академик АН Армянской ССР С. Н. Мергелян, А. А. Даниелян

О последовательностях полиномов, сходящихся на множествах
 типа F_σ

(Представлено 12/X 1987)

Настоящая заметка посвящена решению следующей задачи — дать исчерпывающее описание функций $f(z)$, определенных и конечных на произвольном множестве S типа F_σ , являющихся всюду на S пределом сходящейся последовательности полиномов.

Приведем вначале известные ранее результаты в этом направлении. Первоначально задача для открытых множеств S была поставлена П. Монтелем в 1910 г. в его известном мемуаре ⁽¹⁾. Первым крупным результатом по указанной проблеме явилась установленная в 1936 г. теорема М. А. Лаврентьева ⁽²⁾, которая в работе С. Н. Мергеляна ⁽³⁾ была распространена с открытых множеств на множества типа F_σ . Приведем ее формулировку.

Для того чтобы конечная функция $f(z)$ на произвольном множестве S типа F_σ являлась пределом сходящейся последовательности полиномов, необходимо и достаточно, чтобы любое замкнутое $F \subset S$ имело порцию F_1 , такую, чтобы для некоторой последовательности полиномов $\{Q_{n,1}(z)\}$ выполнялись соотношения: $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_{n,1}(z) = f(z)$, $z \in S \cap \bar{F}_1$; $|Q_{n,1}(z)| \leq C_{F_1} < \infty$, $z \in S \cap \bar{F}_1$, $n \geq 1$. Здесь $\bar{F}_1$ означает дополнение к той из смежных с F_1 областей, которая содержит бесконечно удаленную точку.

Заметим, что в указанных теоремах, несмотря на необходимость достаточный характер условий, первоначальная проблема сводится к решению однотипных задач, в которых приближающие последовательности полиномов подчинены дополнительному условию — равномерной ограниченности в совокупности.

В последнее время в работе А. А. Даниеляна ⁽⁴⁾ изучались вопросы точечной сходимости равномерно ограниченных полиномов на компактных множествах.

Для формулировки теоремы, решающей обозначенную в начале заметки задачу, нам понадобится введенное М. А. Лаврентьевым ⁽²⁾ понятие «почти всюду в смысле конформного отображения». Пусть D — односвязная область и $z = \psi(w)$ конформно отображает единичный круг на область D . Функция $\psi(w)$ определена почти всюду на окружности $|w| = 1$ через свои угловые граничные значения, которые обозначим $\psi(t)$. Ясно, что $\psi(t) \in \partial D$. Рассмотрим две функции — $f(z)$ и

$\Phi(z)$, из коих первая определена на границе ∂D области D , а вторая — в D , где она предполагается аналитической и ограниченной.

Функция $\Phi[\psi(w)]$ имеет для почти всех точек t , $|t|=1$, угловые граничные значения, которые обозначим $F(t)$.

Если почти всюду на $|t|=1$

$$F(t) = f[\psi(t)], \quad (1)$$

то будем говорить, что функция $f(z)$ является на ∂D почти всюду в смысле конформных отображений граничным значением $\Phi(z)$, $z \in D$.

Распространим это определение на произвольный компакт K со связным дополнением.

Будем говорить, что определенная на ∂K^0 функция $f(z)$ является на ∂K^0 почти всюду в смысле конформных отображений граничным значением функции $\Phi(z)$, аналитической ограниченной в K^0 , если для любой компоненты D открытого множества K^0 выполняется (1). В этом случае будем также говорить, что $\Phi(z)$ является аналитическим продолжением в смысле конформных отображений функции $f(z)$ с ∂K^0 на открытое множество K^0 .

Теорема. Для того чтобы конечная функция $f(z)$ на произвольном множестве S типа F , являлась пределом сходящейся последовательности полиномов, необходимо и достаточно, чтобы любое замкнутое $F \subset S$ имело порцию F_1 , такую, что на ∂F_1 $f(z)$ — ограниченная функция первого класса Бэра и на ∂F_1^0 почти всюду в смысле конформных отображений $f(z)$ является граничным значением некоторой аналитической ограниченной на $\bar{F}_1^0$ функции, совпадающей с $f(z)$ на $\bar{F}_1^0 \cap S$.

Таким образом, суть условия теоремы состоит в том, чтобы $f(z)$ была ограниченной функцией первого класса Бэра на ∂F_1 и допускала продолжение с множества $\partial \bar{F}_1^0 \cup (\bar{F}_1^0 \cap S)$ на множество $\bar{F}_1^0$ до аналитической и ограниченной там функции. Разумеется, что продолжение функции с множества $\partial \bar{F}_1^0$ понимается в смысле конформных отображений.

Ограничиваясь открытыми множествами S , заметим, что в теореме сходимости полиномов в отдельных точках S может быть двойкой — для некоторых точек существует их окрестность, в которой сходимость будет равномерной, для других точек такой окрестности может не существовать. Точки первого типа были названы П. Монтелем регулярными точками данной последовательности полиномов, точки второго типа — иррегулярными.

Для открытых множеств теорема может быть углублена посредством описания множества иррегулярных точек соответствующей сходящейся последовательности полиномов.

Для формулировки соответствующего результата нам следует напомнить введенное в (3) определение.

Множество E допускает A -представление, если E равно сумме расширяющихся замкнутых ограниченных множеств, каждое из которых

совпадает с границей некоторой области, содержащей бесконечно удаленную точку.

Отмеченное выше развитие теоремы заключается в следующем.

Утверждение. Для того чтобы функция $f(z)$, определенная в открытом множестве G , являлась пределом сходящейся в G последовательности полиномов, множество иррегулярных точек которой совпадает с наперед заданным множеством $E \subset G$, необходимо и достаточно выполнение условий:

1°. Множество E замкнуто относительно G , допускает A -представление и принадлежит некоторому неограниченному континууму, расположенному вне $G \setminus E$.

2°. Множество E_0 всех точек G , в которых $f(z)$ неаналитична, принадлежит E .

3°. Функция $f(z)$ допускает аналитическое и однозначное продолжение в открытое множество G^* , содержащее $G \setminus E_0$ и такое, что $G^* \setminus E$ представляет совокупность односвязных областей.

4°. Любому замкнутому $F \subset E_0$ соответствует его порция F_1 , такая что на ∂F_1 $f(z)$ — ограниченная функция первого класса Бэри и на ∂F_1^0 почти всюду в смысле конформных отображений является граничным значением некоторой аналитической ограниченной на F_1^0 функции, совпадающей с $f(z)$ на $F_1^0 \cap G$.

Выше мы рассматривали точечную сходимость полиномов и говорили о точках «плохой» сходимости, т. е. об иррегулярных точках.

Можно было бы рассматривать и множество всех тех точек, в которых сходимости вообще нет, т. е. множество точек расходимости данной последовательности полиномов. Не вдаваясь в общность, заметим в заключение, что для того чтобы множество E на окружности $C = \{z : |z| = 1\}$ являлось множеством точек расходимости некоторой последовательности полиномов, равномерно ограниченных в совокупности на C , необходимо и достаточно, чтобы E было типа G_2 .

Математический институт

Академии наук СССР

Кирово-Волжский педагогический институт

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս Ս. Ն. ՄԵՐԳՆԷՅԱՆ, Ա. Ա. ԳԱՆԻՆԷՅԱՆ

F , տիպի բազմությունների վրա զուգամիտող բազմանդամների հաջորդականությունների մասին

Ներկա աշխատանքում բերվում է F , տիպի ցանկացած բազմության վրա որոշված բոլոր այն ֆունկցիաների լրիվ նկարագրությունը, որոնք ամենուրեք բազմության վրա հանդիսանում են զուգամիտող բազմանդամների հաջորդականության սահման:

Արդյունքը զարգացվում է այն իմաստով, որ հնարավոր է լինում միաժամանակ նկարագրել զուգամիտող բազմանդամների իռեզուլյար կետերի բազմությանը:

Որոշված են անհրաժեշտ և բավարար պայմանները ցանկացած բաց

բաղմության վրա որոշված ֆունկցիայի և այդ բաղմության տրված ենթա-
բաղմության համար, որոնց դեպքում ֆունկցիան հանդիսանում է նշված են-
թաբաղմությունը որպես իսկզույցար կետերի բաղմություն ունեցող դուգա-
միտող բաղմանդամների հաջորդականության սահման:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ P. Montel, Collect. Borel, Paris, Gauthier—Villars, 1910. ² M. Laurentieff, Actual. Sci. et Industr, т. 441 (1936). ³ С. Н. Мерзелян, в кн. Некоторые пробле-
мы математики и механики, Новосибирск. СО АН СССР, 1961. ⁴ А. А. Дакиелян. Изв. АН АрмССР. Матем., т. 21, № 4 (1986).