ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXVI 1988 3

УДК 52—6—64

ФИЗИКА

Н. Б. Енгибарян, М. Г. Мурадян

Некоторые обратные задачи теории переноса

(Представлено академиком В. А. Амбарцумяном 21/XI 1987)

1°. Под прямыми задачами теории переноса излучения обычно понимаются задачи об определении поля излучения в рассеивающей среде, локальные свойства которой известны, при заданном распределении внутренних и внешних источников энергии. Большой теоретический и прикладной интерес представляет группа обратных задач, в которых требуется определить локальные свойства среды исходя из информации о состоянии поля излучения и первичных источниках энергии.

Настоящая работа посвящена некоторым обратным задачам вышеуказанного типа. При их решении существенным образом использован принцип инвариантности академика В. А. Амбарцумяна. Большая роль этого принципа в теории прямых задач переноса общеизвестна (см. ([1-3])). Применяется операторный подход к линейным задачам переноса, предложенный в ([3]). Для сохранения общности изложения мы не будем вникать в математические подробности тех или иных вопросов.

2°. Рассмотрим линейную задачу переноса излучения (фотонов, γ-квантов, нейтронов и др.)в однородном плоском слое толщины $\tau_0 \leq \leq \infty$. Пусть τ—глубина точки, рассчитанная от одной из плоских границ слоя. Интегро-дифференциальные уравнения переноса для весьма широкого класса задач, при отсутствии внутренних источников, допускают следующую операторную запись:

$$\pm \frac{d\mathcal{J}^{\pm}(\tau)}{d(\tau)} = -A\mathcal{J}^{\pm}(\tau) + \mathcal{L}^{+}\mathcal{J}^{\pm}(\tau) + \mathcal{L}^{-}\mathcal{J}^{\mp}(\tau). \tag{1}$$

$\mathcal{J}^{+}(\tau)$ и $\mathcal{J}^{-}(\tau)$—искомые интенсивности излучения на глубине τ по направлениям возрастания и убывания τ соответственно. Вектор-функции $\mathcal{J}^{\pm}(\tau)$ принимают значения из вполне правильного конуса K неотрицательных функций некоторого банахова пространства B.

A—оператор умножения на положительную функцию α (α определяется видом коэффициента поглощения). $\mathcal{L}^{+}$ и $\mathcal{L}^{-}$ суть интегральные операторы с положительными ядрами, описывающие перераспределение по направлениям, частотам и др., при элементарном акте рассеяния для излучений, рассеянных вперед и назад соответственно. Операторы $\mathcal{L}^{\pm}$ и A связаны соотношением

$$(\mathcal{L}^{+} + \mathcal{L}^{-})\gamma_1 = \lambda\alpha, \tag{2}$$

где $\eta=1$, а $\lambda\in[0; 1]$—альбедо частицы.

К уравнениям переноса присоединяются граничные условия

$$\mathcal{J}^+(0)=\mathcal{J}_0, \quad \mathcal{J}^-(\tau_0)=0. \tag{3}$$

$\mathcal{J}_0$ описывает освещенность границы со стороны границы $\tau=0$. В случае полубесконечной среды второе из условий (3) понимается как $\mathcal{J}^-(\tau)\to 0$ слабо при $\tau\to+\infty$.

При $\tau_0=\infty$ интенсивности $\mathcal{J}^+$ и $\mathcal{J}^-$ связаны соотношением $\mathcal{J}^-(\tau)=\rho\mathcal{J}^+(\tau)$, где ρ является каноническим решением (КР) обобщенного уравнения Амбарцумяна (см. [2-3])

$$A\rho+\rho A=\mathcal{L}^-+\rho\mathcal{L}^++\mathcal{L}^+\rho+\rho\mathcal{L}^-\rho. \tag{4}$$

ρ—положительный оператор, действующий в B, причем $\|\rho\|_B\leqslant\lambda$.

Пусть оператор-функция $X(\tau)$ удовлетворяет задаче Коши

$$\frac{dX(\tau)}{d\tau}=(-A+\mathcal{L}^++\mathcal{L}^-\rho)X(\tau), \quad X(0)=I, \tag{5}$$

где I—единичный оператор. Решение задачи (1), (3) при $\tau_0=\infty$ имеет вид

$$\mathcal{J}^+(\tau)=X(\tau)\mathcal{J}_0, \quad \mathcal{J}^-(\tau)=\rho X(\tau)\mathcal{J}_0.$$

$X(\tau)$ образует аналитическую полугруппу с инфинитезимальным производящим оператором $G^*=-A+\mathcal{L}^++\mathcal{L}^-\rho$. Из (5) следует представление

$$X(\tau)=D(\tau)+U(\tau), \quad \tau\geqslant 0, \quad D(0)=I, \quad U(0)=0, \tag{6}$$

где $D(\tau)=e^{-A\tau}$ „диагональный" оператор умножения на функцию $e^{-a\tau}$, а $U(\tau)$ положительный ограниченный интегральный оператор, действующий в B.

Каждому подслою толщины r соответствуют оператор отражения $R(\tau)$ и оператор пропускания $Q(\tau)$. Они действуют в B, причем

$$R\geqslant 0, \ Q\geqslant 0, \ R(0)=0, \ Q(0)=I, \ \|R+Q\|_B\leqslant 1, \ \|R\|_B<1. \tag{7}$$

Условия (7) отражают свойство отсутствия генерации излучения внутри среды.

Имеют место следующие формулы сложения слоев:

$$\begin{aligned} R(r_1+r_1)&=R(r_1)+Q(r_1)R(r_2)[I-R(r_1)R(r_2)]^{-1}Q(r_1);\\ Q(r_1+r_2)&=Q(r_2)[I-R(r_1)R(r_2)]^{-1}Q(r_1). \end{aligned} \tag{8}$$

Справедливы также соотношения, полученные из (8) перестановкой индексов 1 и 2.

При $r_1=r_2=\dfrac{r}{2}$ (8) обращаются в формулы удвоения слоя:

$$\begin{aligned} R(r)&=R\left(\frac{r}{2}\right)+Q\left(\frac{r}{2}\right)R\left(\frac{r}{2}\right)\left[I-R^2\left(\frac{r}{2}\right)\right]^{-1}Q\left(\frac{r}{2}\right);\\ Q(r)&=Q\left(\frac{r}{2}\right)\left[I-R^2\left(\frac{r}{2}\right)\right]^{-1}Q\left(\frac{r}{2}\right). \end{aligned} \tag{9}$$

3° *Обратная задача А:* построить операторы $Q\left(\frac{r}{2}\right)$ и $R\left(\frac{r}{2}\right)$ по известным $Q(r)$ и $R(r)$.

В скалярном случае, когда $Q(r)$ и $R(r)$ суть числа, задача A легко решается с помощью (9). Решить уравнения (9) относительно $Q\left(\frac{r}{2}\right)$ и $R\left(\frac{r}{2}\right)$ в операторном случае не удается, даже если Q и R матрицы порядка 2×2.

Ниже мы опишем один способ решения задачи A, основанный на применении операторов ρ и $X(r)$. Введем оператор $W(r)$, где $W(r)>0$, представляющий собой каноническое решение уравнения

$$W(r)=[R(r)+Q(r)W(r)][Q(r)+R(r)W(r)]. \tag{10}$$

Справедливы формулы

$$\rho=R(r)+Q(r)W(r),\ X(r)=Q(r)+R(r)W(r). \tag{11}$$

На основании формул (10), (11) и полугруппового свойства можно предложить следующую возможную схему решения задачи A.

I шаг: строится КР W уравнения (10), ρ и X определяются из (11).

II шаг: извлекается положительный квадратный корень из $X(r)$: $X\left(\frac{r}{r}\right)=[X(r)]^{1/2}$. Далее определяется $W\left(\frac{r}{2}\right)=\rho X\left(\frac{r}{2}\right)$.

III шаг: $Q\left(\frac{r}{2}\right)$ и $R\left(\frac{r}{2}\right)$ определяются с помощью следующих формул:

$$\begin{gathered} Q\left(\frac{r}{2}\right)=(I-\rho^2)X\left(\frac{r}{2}\right)\left[I-W^2\left(\frac{r}{2}\right)\right]^{-1}, \\ R\left(\frac{r}{2}\right)=\left[\rho-X\left(\frac{r}{2}\right)\right]W\left(\frac{r}{2}\right)\left[I-W^2\left(\frac{r}{2}\right)\right]^{-1}. \end{gathered} \tag{12}$$

Оператор $I-W^2$ обладает положительным обратным, так как $\left\|W\left(\frac{r}{2}\right)\right\|\leqslant\|\rho\|\left\|X\left(\frac{r}{2}\right)\right\|<1$ в силу $\|\rho\|\leqslant\lambda$ и $\|X(r)\|<1$ при $r>0$.

Вопрос реализации предложенной схемы нами изучен как теоретически, так и эмпирически. Рассмотрим следующие итерации для (10):

$$W_{n+1}=(R+QW_n)(Q+RW_n),\ W_0=0,\ n=0,1,\ldots \tag{13}$$

(13) определяют возрастающую последовательность операторов W_n в B. С учетом (7) индукцией по n доказываются оценки $\|W_n\|\leqslant\lambda$. Из этих оценок, монотонности (W_n) и полной правильности конуса K следует сильная сходимость $W_n\to W$ в B. W является КР уравнения (10). В ряде случаев $W_n\to W$ по норме.

Рассмотрим вопрос об извлечении квадратного корня из $X(r)$. Как из представления (6), так и из второй формулы (11) видно, что при небольших значениях r первое слагаемое $D(r)$ является доминирующим. Выделение же из численно определенного оператора $X(r)$ сингулярной диагональной части D не представляет труда, если использовано то или иное дискретное представление операторов.

Ищем „главный" корень Y уравнения $Y^2=D+U$ в виде $Y=D_0+V$, где диагональный оператор D_0—положительный квадратный корень из D, V удовлетворяет уравнению $D_0V+VD_0=U-V^2$. Рассмотрим итерации

$$D_0V_{n+1}+V_{n+1}D_0=U-V_n^2,\quad V_0=0,\ n=0,1,\ldots \qquad (14)$$

Их сходимость можно доказать при некоторых ограничениях на „малость" U по сравнению с D. Нами рассмотрены численные примеры, когда X—матрица $m\times m$, при различных значениях m. Эти примеры указывают на быструю сходимость итераций (14) и положительность V для достаточно широкого класса матриц X.

4°. *Обратная задача Б.* Пусть известны Q и R некоторого слоя. Требуется определить $\mathcal{L}^{\pm}$ и A.

Толщину слоя будем принимать за 1. Путем построения ρ и $X(1)$ и n-кратного извлечения квадратного корня из $X(1)$ определяется $X(2^{-n})$. Заметим, что каждый последующий шаг извлечения корня численно реализуется проще предыдущего. Далее по формулам (12) определяются $Q_n=Q(2^{-n})$ и $R_n=R(2^{-n})$. Справедливы соотношения (см. [3])

$$\lim_{\tau\to0+}\frac{1}{\tau}R(\tau)=\mathcal{L}^-,\quad \lim_{\tau\to0+}\frac{1}{\tau}[I-Q(\tau)]=A-\mathcal{L}^+.$$

Воспользуемся приближенными соотношениями $\mathcal{L}^-\approx2^nR_n$, $A-\mathcal{L}^+\approx2^n(I-Q_n)$. Критерием их применимости может служить близость R_{n-1} и $2R^n$. Оператор A может быть определен либо выделением диагональной части от $2^n(I-Q_n)$, либо путем использования соотношения (2).

Решение задачи Б может быть применено, в частности, для экспериментального изучения локального акта взаимодействия нейтронов или γ-квантов с твердыми телами.

5°. *Обратная задача В.* Пусть $\mathcal{L}^+=\mathcal{L}^-=\mathcal{L}$ и известен оператор A. Требуется найти $\mathcal{L}$ путем (экспериментального) определения оператора ρ отражения из полупространства.

При $\mathcal{L}^{\pm}=\mathcal{L}$ уравнение Амбарцумяна (4) имеет вид $A\rho+\rho A=(I+\rho)\mathcal{L}(I+\rho)$, откуда $\mathcal{L}=(I+\rho)^{-1}(A\rho+\rho A)(I+\rho)^{-1}$.

Решение задачи В имеет астрофизические применения.

6°. *Обратная задача Г.* (задача деления). Пусть известны операторы отражения и пропускания слоя Π_1 и слоя Π, полученного в результате наложения Π_1 и Π_2. Требуется найти отражающую и пропускающую способности слоя Π_2.

Задача Г полностью решается исходя из формул, обобщающих формулы сложения (8) на случай сред, „правые" и „левые" операторы отражения и пропускания которых могут не совпадать (см. [4]).

Институт прикладных проблем
физики Академии наук Армянской ССР

Ն. Բ. ԵՆԳԻԲԱՐՅԱՆ, Մ. Հ. ՄՈՒՐԱԴՅԱՆ

Տեղափոխման տեսության որոշ հակադարձ խնդիրներ

Աշխատանքում դիտարկվում են համասեռ հարթ շերտում ճառագայթման տեղափոխման որոշ հակադարձ խնդիրներ՝ կապված միջավայրի տեղային հատկությունների որոշման հետ։ Կիրառվում է ակադեմիկոս Վ. Հ. Համբարձումյանի ինվարիանտության սկզբունքը։

Դրվել և լուծվել են չորս հակադարձ խնդիրներ։ Γ հաստության շերտի անցման և անդրադարձման R_Γ և Q_Γ օպերատորների միջոցով կառուցված են համապատասխան օպերատորներ $\frac{\Gamma}{2}$ հաստության շերտի համար։ R_Γ-ի և Q_Γ-ի միջոցով գտնված են միջավայրի ինֆինիտեզիմալ օպերատորները։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. А. Амбарцумян*, Научные труды, т. 1, Изд. АН АрмССР, Ереван, 1960. [2] *В. В. Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, М., Гостехиздат, 1956. [3] *Н. Б. Енгибарян, М. А. Мнацаканян*, ДАН СССР, т. 217, № 4 (1974). [4] *A. Shimizu, K. Aoki*, Application of invariant embedding to reactor physics. Academic Press, New York and London, 1972.