ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXVI 1988 1

УДК 517.977

МАТЕМАТИКА

Р. В. Хачатрян

Динамически устойчивые принципы оптимальности в многокритериальных многошаговых играх

(Представлено академиком АН Армянской ССР Р. В. Амбарцумяном 27/X 1987)

Свойство динамической устойчивости принципов оптимальности, впервые введенное в ([1]) и далее подробно исследованное в ([2]), относится к важнейшим аспектам теории многошаговых неантагонистических игр. К числу динамически устойчивых принципов оптимальности в этих играх относятся равновесие по Нэшу, M-оптимальность и оптимальность по Парето. Поэтому важным оказывается вопрос исследования динамической устойчивости известных принципов оптимальности для многокритериальных игр.

1. Многокритериальные многошаговые игры. Пусть $G=\langle X;\gamma\rangle$— древовидный граф, $X=\bigcup\limits_{i=1}^{n+1} X_i$, где $X_i\cap X_j=\varnothing$ при $i\neq j$ и $\gamma_x=\varnothing$ для всех позиций $x\in X_{n+1}$. Множество X_i называется множеством очередности i-го игрока $(i=1, 2, \ldots, n)$, а X_{n+1}—множеством окончательных позиций. На множестве X_{n+1} определены вещественные вектор-функции $H_1; H_2; \ldots; H_n$, где вектор-функция H_i называется выигрышем i-го игрока, $i=1, 2, \ldots, n$, $H_i=(H_{i_1}; H_{i_2}; \ldots; H_{i_m})$. Игра происходит следующим образом.

Задано n игроков, перенумерованных натуральными числами 1, 2, …, n. Предположим, что $x_0\in X_{i_1}$, тогда в вершине (позиции) x_0 „ходит" игрок i_1 и выбирает вершину $x_1\in\gamma(x_0)$; если $x_1\in X_{i_2}$, то в вершине x_1 „ходит" игрок i_2 и выбирает следующую вершину $x_2\in\in\gamma(x_1)$ и т. д.; если на k-ом шаге реализуется позиция $x_{k-1}\in X_{i_k}$, то в ней „ходит" игрок i_k и выбирает следующую вершину (позицию) $x_k\in\gamma(x_{k-1})$. Игра прекращается, как только достигается вершина $x_l\in X_{n+1}(\gamma(x_l)=\varnothing)$.

В результате последовательного выбора позиций однозначно реализуется некоторая последовательность вершин $x_0, x_1, \ldots, x_l$, определяющая путь в древовидном графе G, исходящий из начальной позиции x_0 и достигающий одной из окончательных позиций игры. Такой путь будем называть в дальнейшем партией.

Из-за древовидности графа G каждая позиция $x_l\in X_{n+1}$ однозначно определяет партию, достигающую этой позиции. В окончательной позиции x_l каждый из игроков $i\in\{1, 2, \ldots, n\}$ получает выигрыш $H_i(x_l)=\{H_{i_1}(x_l); \ldots; H_{i_m}(x_l)\}$.

Предполагается, что игрок i при совершенном выборе в позиции $x\in X_i$ знает эту позицию, а следовательно, из-за древовидности графы G может восстановить все предыдущие позиции. В этом случае говорят, что игроки имеют полную информацию.

Функция u_i, которая каждой позиции $x\in X_i$ ставит в соответствие некоторую позицию $y\in\gamma_k$, называется стратегией игрока i. Множество всевозможных стратегий игрока i будем обозначать через $D_i (i=1, \ldots, n)$.

Таким образом, стратегия i-го игрока предписывает ему в любой позиции x из множества его очередности x_i однозначный выбор следующей позиции.

Набор стратегий $u=(u_1; \ldots; u_n)$, где $u_i\in D_i$, называется ситуацией в игре. Каждая ситуация однозначно определяет партию в игре, а следовательно, и выигрыш игроков.

Действительно, пусть $x_0\in X_{i_1}$, тогда в ситуации $u=(u_1, \ldots, u_n)$ следующая позиция x_1 определяется однозначно по правилу $x_1=u_{i_1}(x_0)$; пусть теперь $x_1\in X_{i_2}$, тогда x_2 определяется однозначно по правилу $x_2=u_{i_2}(x_1)$; если на k-м шаге реализовалась позиция $x_{k-1}\in X_{i_k}$, тогда x_k определяется однозначно по правилу $x_k=u_{i_k}(x_{k-1})$ и т. д.

Пусть ситуации $u=(u_1, \ldots, u_n)$ в указанном смысле соответствует партия $x_0, x_1, \ldots, x_l$.

Тогда можно ввести понятие вектор-функции выигрыша, определенной на множестве стратегий $K_i(u)=K_i(u_1; u_2; \ldots u_n)=\{K_{i_1}(u); K_{i_2}(u); \ldots; K_{i_m}(u)\}=\{H_{i_1}(x_l); \ldots; H_{i_m}(x_l)\}=H_i(x_l)$ i-го игрока, $i=1, \ldots, n$. Совокупность $\Gamma=\langle D_1, D_2, \ldots, D_n; K_1, K_2, \ldots, K_n\rangle$ называется многокритериальной игрой с полной информацией n лиц на графе G в нормальной форме.

2. Определение 1. *Ситуация $u^*=(u_1^*; \ldots, u_n^*)$ называется ситуацией многокритериального равновесия в игре Γ, если не существует такого i и такой стратегии, что $K_i(u^*)\leqslant K_i(u^*\|u_i)$ и хотя бы для одной компоненты j_0 имеет место $K_{i_{j_0}}(u^*)<K_{i_{j_0}}(u^*\|u_i)$.*

Это означает, что отклонение i-ым игроком от стратегии u_i^* при условии неотклонения от стратегий, входящих в ситуацию u^*, другими игроками не может привести к увеличению выигрыша i-го игрока одновременно по всем компонентам.

Определение 2. *Пусть M некоторая коалиционная структура (M—некоторое фиксированное множество подмножества N всех игроков).*

Ситуация $\bar{u}$ называется ситуацией многокритериального M-равновесия в игре Γ, если для каждого $S\subset M$ нельзя найти коалиционной стратегии $u_S (u_S=\{u_i: i\in S\})$ такой, что $K_i(\bar{u})\leqslant K_i(\bar{u}\|u_S)$ для $i\in S$ и одновременно по всем компонентам. $(\bar{u}\|u_S)$— ситуация, в которой стратегии $\bar{u}_i$, $i\in S$ заменены на произвольную коалиционную стратегию $u_S\in\prod_{i\in S} D_i$.

Рассмотрим вспомогательную многошаговую игру $\overline{\Gamma} = \langle D_1, D_2, \ldots, D_n; \overline{K}_1, \overline{K}_2, \ldots, \overline{K}_n \rangle$, где $\overline{K}_i = \sum_{l=1}^{m} K_{i_l}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Таким образом, множество стратегий в играх Γ и $\overline{\Gamma}$ совпадают, игра $\overline{\Gamma}$ является игрой с однокритериальным выигрышем, который для каждого игрока полагается равным сумме компонент вектор-выигрыша в игре Γ.

Теорема 1. *Пусть $u^* = (u_1^*, \ldots, u_n^*)$ ситуация равновесия по Нэшу в игре $\overline{\Gamma}$ с однокритериальным выигрышем, тогда эта же ситуация u^* является ситуацией многокритериального равновесия в игре* Γ.

Теорема 2. *Пусть $\hat{u}$ является ситуацией M-равновесия в игре $\overline{\Gamma}$, тогда эта же ситуация является ситуацией многокритериального M-равновесия в игре* Γ.

Докажем теорему 2. Напомним определение M-равновесия для случая однокритериальной игры $\overline{\Gamma}$. Ситуация $\hat{u} = (\hat{u}_1; \ldots; \hat{u}_n)$ называется ситуацией M-равновесия, если для любой коалиции $S \subseteq M$ существует такой индекс $i_0 \in S$, что $K_{i_0}(\hat{u}) > K_{i_0}(\hat{u} \| u_S)$.

Пусть $\hat{u} = (\hat{u}_1; \ldots, \hat{u}_n)$ ситуация M-равновесия в игре $\overline{\Gamma}$. Предположим, что теорема 2 неверна. Тогда согласно определению 2 существует такая коалиция $S \subseteq M$, стратегия u_S, что

$$K_i(\hat{u}) \leqslant K_i(\hat{u} \| u_S), \ i \in S. \tag{1}$$

Из (1) имеем

$$K_{i_l}(\hat{u}) \leqslant K_{i_l}(\hat{u} \| u_S), \ l = 1, \ldots, m. \tag{2}$$

Складывая (2) покомпонентно, получаем

$$\sum_{l=1}^{m} K_{i_l}(\hat{u}) \leqslant \sum_{l=1}^{m} K_{i_l}(\hat{u} \| u_S). \tag{3}$$

Из (3) получаем

$$\overline{K}_i(\hat{u}) \leqslant \overline{K}_i(\hat{u} \| u_S), \ i \in S. \tag{4}$$

Неравенство (4) противоречит тому, что $\hat{u}$ ситуация M-равновесия в игре $\overline{\Gamma}$. Теорема доказана. Доказательство теоремы 1 проводится аналогично.

С любым подграфом $G_y = \langle X_y, \Gamma \rangle$ графа G свяжем подыгру Γ_y следующим образом: множество очередности игроков в подыгре Γ_y определяется по правилу $X_i^y = X_i \cap X_y$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, множество окончательных позиций есть $X_{n+1}^y = X_{n+1} \cap X_y$, вектор-выигрыши игроков H_i^y в подыгре полагаются равными: $H_i^y(x) = H_i(x)$ для всех $x \in X_{n+1}^y$, $i = 1, 2, \ldots, n$. В соответствии с этим стратегия i-го игрока u_i^y в рассматриваемой подыгре определяется как усечение стратегии того же игрока u_i в игре Γ, т. е. $u_i^y(x) = u_i(x)$, $x \in X_i^y$, $i = 1, \ldots, n$. Множество всех таких стратегий обозначим через D_i^y. В результате каждый подграф G_y определяет игру в нормальной форме $\Gamma_y = \langle D_1, \ldots, D_n^y; K_1^y, \ldots, K_n^y \rangle$, где вектор-функция выигрыша K_i^y

определена на $D_1^y\times D_2^y\times\ldots\times D_n^y$. Ситуация многокритериального равновесия $\bar{u}=(\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_n)$ называется ситуацией абсолютного многокритериального равновесия в игре Γ, если для любой позиции $y\in x$ ситуация $\bar{u}^y=(\bar{u}_1^y,\ldots,\bar{u}_n^y)$, где $\bar{u}_i^y$ усечение стратегии $\bar{u}_i$, является ситуацией многокритериального равновесия в соответствующей подыгре. Ситуация абсолютного многокритериального M-равновесия определяется аналогично.

В игре $\bar{\Gamma}$ всегда существует ситуация абсолютного равновесия (см. ([3])). Отсюда и из теоремы 2 следует существование абсолютного многокритериального равновесия в игре Γ.

3. Динамическая устойчивость. Пусть $x^1, x^2;\ldots; x^r$ ($x^r\in X_{n+1}$) партия в ситуации многокритериального абсолютного равновесия $u^*=(u_1^*,\ldots,u_n^*)$. Рассмотрим последовательность подыгр $\Gamma_{x_1},\Gamma_{x_2},\ldots,\Gamma_{x_r}$ вдоль партии $x_1,\ldots,x_r$. По определению абсолютного многокритериального равновесия усечение ситуации $u^*=(u_1^*,u_2^*,\ldots,u_n^*)$ на подыгре Γ_{x_k}, $k=1,\ldots,r$, является ситуацией многокритериального равновесия в подыгре Γ_{x_k}, $k=1,2,\ldots,r$. Это свойство ситуации абсолютного многокритериального равновесия называется динамической устойчивостью (см. ([1])).

Фактически динамическая устойчивость ситуации многокритериального равновесия следует из динамической устойчивости ситуации равновесия в игре $\bar{\Gamma}$. В общем случае нельзя утверждать существование абсолютного M-равновесия в игре $\bar{\Gamma}$, поэтому нельзя априори утверждать существование и динамическую устойчивость ситуации многокритериального M-равновесия в игре Γ.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Ռ. Վ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

Օպտիմալացման սկզբունքների դինամիկական կայունությունը բազմահայտանիշային բազմաքայլ խաղերում

Հոդվածում դիտարկվում է բազմաքայլ բազմահայտանիշային լրիվ ինֆորմացիայով խաղեր, որտեղ ներմուծվում է օպտիմալացման նոր սկզբունքներ և ապացուցվում է նրանց գոյությունը։

Ուսումնասիրվում է բազմահայտանիշային հավասարակշռության դինամիկական կայունությունը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. А. Петросян*, Вестн. Ленинградского ун-та, т. 19, вып. 4 (1977). [2] *Л. А. Петросян, Н. Н. Данилов*, Кооперативные дифференциальные игры и их приложения, Изд-во Томского ун-та, 1985. [3] *Дж. Мак Кинси*, Введение в теорию игр, Физматгиз, М., 1960.