

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

В. И. Гаврилов, В. С. Захарян

Множества точек Линделёфа произвольных комплексных функций

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 5/IX 1987)

В статье доказывается, что множества точек Линделёфа для произвольных комплексных функций, определенных в единичном круге $D: |z| < 1$ на комплексной плоскости, совпадают с множествами точек Линделёфа мероморфных функций и являются множествами вида $F \setminus E$, где F — некоторое множество типа F_σ на окружности $\Gamma: |z| = 1$, а E — некоторое совершенное пористое множество на Γ .

1. Рассмотрим в круге $D: |z| < 1$ гиперболическую метрику с линейным элементом $ds(z) = (1 - |z|^2)^{-1} |dz|$; $\sigma(z_1, z_2)$ обозначает расстояние между точками $z_1, z_2 \in D$ в гиперболической метрике. Для произвольной точки ζ границы $\Gamma: |z| = 1$ обозначим через $h(\zeta, \varphi)$ хорду круга D , оканчивающуюся в точке ζ и образующую с радиусом $h(\zeta, 0)$ круга D в точке ζ угол раствора φ , $-\frac{\pi}{2} < \varphi < +\frac{\pi}{2}$. Подобласть круга D , расположенную между хордами $h(\zeta, \varphi_1)$ и $h(\zeta, \varphi_2)$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi_1 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2}$, обозначим через $\Delta(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)$.

Следуя ⁽¹⁾, для произвольного множества $E \subset \Gamma$ обозначим через $p(E)$ совокупность неизолированных точек множества E , которые являются точками пористости множества E . Множество E назовем совершенным пористым множеством, если на Γ можно найти такую не более чем счетную совокупность замкнутых множеств $\{F_n\}$, что $E = \bigcup_n p(F_n)$.

Для произвольного отображения $f: D \rightarrow \Omega$ круга D в сферу Римана Ω , произвольной точки $\zeta \in \Gamma$ и произвольного множества $S \subset D$, для которого точка ζ является предельной точкой, рассмотрим предельное множество $C(f, \zeta, S)$ функции f в точке ζ по множеству S в виде $C(f, \zeta, S) = \bigcap_{r>0} \overline{f(v_r(\zeta) \cap S)}$, где $v_r(\zeta) = \{z \in D; |z - \zeta| < r\}$, $r > 0$ и черта обозначает замыкание множества на сфере Римана Ω .

2. В работе ⁽²⁾ функция $f: D \rightarrow \Omega$ названа эквиморфной функцией, если f есть композиция $f(z) = g(T(z))$ некоторой мероморфной функции $g(z)$ в круге D и эквиморфизма $T: D \rightarrow D$, т. е. такого гомеоморфного отображения T круга D на себя, что T и его обратное отображение T^{-1} равномерно непрерывны относительно гиперболических метрик в области определения и в области значений гомео-

морфизма T . В силу хорошо известных оценок искажения гиперболической метрики при плоских квазиконформных отображениях (см., например, (3)) любое квазиконформное отображение $T: D \rightarrow D$ является эквиморфизмом. Поэтому множество эквиморфных функций содержит множество псевдоморфных функций, и, как показано в (2), это вложение строгое.

Последовательность точек (z_n) , $z_n \in D$, $n = 1, 2, \dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 1$, называется P -последовательностью для эквиморфной функции $f(z)$, если для любого $\varepsilon > 0$ и любой бесконечной подпоследовательности (z_{n_k}) в объединении $\bigcup_k D(z_{n_k}, \varepsilon)$ гиперболических кругов $D(z_{n_k}, \varepsilon) = \{z \in D; \varphi(z, z_{n_k}) < \varepsilon\}$ функция $f(z)$ принимает бесконечно часто каждое значение из сферы Римана Ω , за возможным исключением не более двух значений. Для мероморфных функций это понятие рассматривалось в (4), где доказано, что отсутствие у мероморфной функции P -последовательностей характеризует свойство нормальности этой функции. Этот результат перенесен на эквиморфные функции в (2). Остается открытым вопрос: является ли класс эквиморфных функций максимально широким множеством функций, у которых свойство нормальности характеризуется в терминах P -последовательностей. Частичное подтверждение положительного ответа на этот вопрос содержится в работе (5).

3. Граничную точку $\zeta \in \Gamma$ назовем точкой Линделёфа для функции $f: D \rightarrow \Omega$, если для любых углов $\Delta^1(\zeta) = \Delta(\zeta, \varphi_1^1, \varphi_2^1)$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi_1^1 < \varphi_2^1 < \frac{\pi}{2}$, и $\Delta^2(\zeta) = \Delta(\zeta, \varphi_1^2, \varphi_2^2)$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi_1^2 < \varphi_2^2 < \frac{\pi}{2}$, справедливо $C(f, \zeta, \Delta^1(\zeta)) = C(f, \zeta, \Delta^2(\zeta)) \neq \Omega$. Множество точек Линделёфа функции f обозначим через $L(f)$.

Теорема 1. Точка $\zeta \in \Gamma$ является точкой Линделёфа для эквиморфной функции $f(z)$, определенной в D , в том и только в том случае, когда 1) для любых двух хорд $h(\zeta, \varphi_1)$, $h(\zeta, \varphi_2)$ справедливо $C(f, \zeta, h(\zeta, \varphi_1)) = C(f, \zeta, h(\zeta, \varphi_2)) \neq \Omega$ и 2) ни одна из хорд $h(\zeta, \varphi)$ не содержит P -последовательностей функции $f(z)$.

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим произвольную точку $\zeta \in L(f)$ для эквиморфной функции $f(z)$. Чтобы проверить выполнение свойства 2), допустим, напротив, что некоторая хорда $h(\zeta, \varphi_0)$ содержит P -последовательность (z_n) функции $f(z)$. Тогда, в силу геометрии круга D , для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такой угол $\Delta(\zeta) = \Delta(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)$, который содержит хорду $h(\zeta, \varphi_0)$ и в котором содержатся все гиперболические круги $D(z_n, \varepsilon)$, $n \in \mathbb{N}$. Согласно определению P -последовательности $C(f, \zeta, \Delta(\zeta)) = \Omega$, что противоречит условию $\zeta \in L(f)$.

Чтобы установить справедливость свойства 1), мы докажем, что $C(f, \zeta, h(\zeta, \varphi)) = C(f, \zeta, \Delta(\zeta))$ для любой хорды $h(\zeta, \varphi)$ и любого угла $\Delta(\zeta)$. Заметим, прежде всего, что

$$C(f, \zeta, h(\zeta, \varphi)) \subset C(f, \zeta, \Delta(\zeta)) \quad (1)$$

для любой хорды $h(\zeta, \varphi)$ и любого угла $\Delta(\zeta)$.

Допустим теперь, что существует такая хорда $h(\zeta, \varphi)$, для которой вложение (1) не является совпадением входящих в него множеств. Тогда существует такое значение $w \in \Omega$, что $w \in C(f, \zeta, h(\zeta, \varphi))$ и $w \notin C(f, \zeta, \Delta(\zeta))$ для любого угла $\Delta(\zeta)$, содержащего хорду $h(\zeta, \varphi)$. Значит, каждый угол $\Delta(\zeta)$, содержащий хорду $h(\zeta, \varphi)$, содержит некоторую последовательность точек (z_n^A) , $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n^A = \zeta$, по которой $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n^A) = w$. При этом для любого номера $n \in \mathbb{N}$ гиперболическое расстояние

$$\sigma(z_n^A; h(\zeta, \varphi)) = \inf\{\sigma(z_n^A, z); z \in h(\zeta, \varphi)\}$$

удовлетворяет условию $\sigma(z_n^A; h(\zeta, \varphi)) \leq \varphi(\varepsilon)$, $n \in \mathbb{N}$, где $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(\varepsilon) = 0$. Выбирая произвольную последовательность (ε_m) , $\varepsilon_m > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_m = 0$, получим множество последовательностей (z_n^m) , $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, так, чтобы $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n^m = \zeta$, $m \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n^m) = w$, $m \in \mathbb{N}$. Для последовательности $(z_n^n) = (z_n)$ имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \zeta$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(z_n; h(\zeta, \varphi)) = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = w$. При фиксированном $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим на хорде $h(\zeta, \varphi)$ точку z_n' , для которой $\sigma(z_n'; z_n) = \sigma(z_n; h(\zeta, \varphi))$. Для последовательностей точек (z_n) и (z_n') имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(z_n, z_n') = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = w$ и последовательность $(f(z_n'))$ не стремится к w (так как $w \notin C(f, \zeta, h(\zeta, \varphi))$). Согласно ((2), теорема 6), каждая из последовательностей (z_n) и (z_n') является P -последовательностью эквиморфной функции $f(z)$. Противоречие.

Достаточность. Допустим, что существует такой угол $\Delta(\zeta) = \Delta(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)$, что $C(f, \zeta, \Delta(\zeta)) \neq C(f, \zeta, h(\zeta, \varphi))$ ни для одной хорды $h(\zeta, \varphi)$. Значит, существует такое значение $w \in \Omega$, что $w \in C(f, \zeta, \Delta(\zeta))$ и $w \notin C(f, \zeta, h(\zeta, \varphi))$ для всех хорд $h(\zeta, \varphi)$. Поэтому существует такая последовательность точек (z_n) , что $z_n \in \Delta(\zeta)$, $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \zeta$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = w$. Не ограничивая общности и выбирая, если нужно, соответствующую последовательность, можно считать, что последовательность $(\arg z_n)$ сходится к некоторому числу φ_0 , $-\frac{\pi}{2} < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$. Тогда, как и выше, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(z_n; h(\zeta, \varphi_0)) = 0$. Рассмотрим на хорде $h(\zeta, \varphi_0)$ последовательность точек (z_n') , для которых $\sigma(z_n, z_n') = \sigma(z_n; h(\zeta, \varphi_0))$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(z_n, z_n') = 0$ и последовательность $(f(z_n'))$ не стремится к w . Как и выше, заключаем, что последовательность (z_n') является P -последовательностью функции $f(z)$, а это противоречит условию 2) теоремы 1.

4. Установим теперь полную характеристику множества $L(f)$ для произвольных функций.

Теорема 2. Класс множеств $\{L(f)\}$ для произвольных функций $f: D \rightarrow \Omega$ совпадает с классом $\{L(f)\}$ для мероморфных функций $f(z)$ в D и классом множеств $L \subset \Gamma$, имеющих вид $L = F \setminus E$,

где F — множество типа F , на Γ , а E — совершенное пористое множество на Γ .

Доказательство. Для произвольной функции $f: D \rightarrow \Omega$ обозначим через $K(f)$ множество точек $z \in \Gamma$, в которых $C(f, z, \Delta^1(z)) = C(f, z, \Delta^2(z))$ для любых углов $\Delta^1(z)$ и $\Delta^2(z)$, а через $I(f)$ такое подмножество из $K(f)$, в точках z которого $C(f, z, \Delta(z)) = \Omega$ для любого угла $\Delta(z)$. По определению, $K(f) = L(f) \cup I(f)$ и $L(f) \cap I(f) = \emptyset$. Для произвольной функции $f: D \rightarrow \Omega$ множество $I(f)$ имеет тип G_δ на Γ (см. (6) или (7)) и $\Gamma = K(f) \cup E$, где E — некоторое совершенное пористое множество на Γ (см. (1)). Поэтому $L(f) = F \setminus E$, где $F = \Gamma \setminus I(f)$ — некоторое множество типа F_σ на Γ , а E — совершенное пористое множество на Γ .

Рассмотрим теперь произвольное множество $L = F \setminus E$, где F — множество типа F_σ на Γ и E — совершенное пористое множество на Γ . Точку $z \in \Gamma$ отнесем к множеству $P(f)$ для мероморфной функции $f(z)$ в D , если каждая хорда $h(z, \varphi)$ содержит P -последовательность функции $f(z)$, а точку $z \in \Gamma$ отнесем к множеству $F(f)$, если $C(f, z, \Delta(z))$ состоит из единственного значения $a_z \in \Omega$ для всех углов $\Delta(z)$ и значение a_z одно и то же для всех $\Delta(z)$. Тогда $P(f) \cap L(f) = \emptyset$ и $F(f) \subset L(f)$.

Согласно ((1), теорема 2), существует такая ограниченная голоморфная функция $g_1(z)$ в D , у которой $K(g_1) = \Gamma \setminus E$. Поскольку $I(g_1) = \emptyset$, то $L(g_1) = \Gamma \setminus E$.

Согласно ((8), теорема 2), существует такая мероморфная функция $g_2(z)$ в D , у которой $P(g_2) = \Gamma \setminus F$ и $F = F(g_2)$, причем в каждой точке $z \in F = F(g_2)$ значение a_z конечное.

Функция $f(z) = g_1(z) + g_2(z)$ имеет $L(f) = F \setminus E$. Действительно, каждая точка $z \in F \setminus E$ принадлежит множествам $L(g_1)$ и $F(g_2) \subset L(g_2)$, и значит $z \in L(f)$. Каждая точка $z \in (\Gamma \setminus F) \cap E$ принадлежит множествам $P(g_2)$ и $L(g_1)$, и значит $z \in P(f)$, т. е. $z \notin L(f)$. Наконец, любая точка $z \in E \cap F$ принадлежит множеству $F(g_2)$ и не принадлежит множеству $L(g_1)$, и значит z не принадлежит множеству $L(f)$.

5. Разбиение $\Gamma = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ окружности Γ на три взаимно непесекающиеся множества E_1, E_2, E_3 , для которых существует такая мероморфная в D функция $f(z)$, что $L(f) = E_1$, $I(f) = E_2$, будем называть линделёфовым разбиением. Простой анализ доказательства теоремы 2 показывает, что нами доказана

Теорема 3. Условия (а) $E_1 = F \setminus E$, где F — множество типа F_σ на Γ , а E — совершенное пористое множество на Γ , и (б) E_2 — множество типа G_δ на Γ необходимы и достаточны для того, чтобы разложение $\Gamma = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ было линделёфовым.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Կոմպլեքս փոփոխականի կամայական ֆունկցիաների
Լինդելյոֆի կետերի բազմությունը

Օգտվելով P -հաղորդականության հատկություններից, միավոր շրջանում որոշված էկվիմորֆ ֆունկցիայի համար, ապացուցվում է անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ $z \in \Gamma(\Gamma:|z|=1)$ նվրակետը Լինդելյոֆի կետ լինելու համար:

Այնուհետև ապացուցվում է կոմպլեքս հարթության մեջ $|z| < 1$ միավոր շրջանում որոշված կոմպլեքս փոփոխականի կամայական ֆունկցիայի Լինդելյոֆի կետերի բազմությունը շրջանագծի վրա համընկնում է մերոմորֆ ֆունկցիայի Լինդելյոֆի կետերի բազմության հետ և ունի $F \setminus E$ տեսքը, որտեղ F -ը որևէ բազմություն է Γ -ում F , տեսքի, իսկ E -ն որևէ կատարյալ ծակոտկեն բազմություն է Γ -ում:

Աշխատանքի վերջում նշվում է ըստ Լինդելյոֆի շրջանագծի վերլուծման անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ С. В. Колесников, Мат. заметки, т. 28, № 6 (1980). ² Х. Э. Мехия, ДАН СССР, т. 265, № 1 (1982). ³ О. Lehto, К. I. Virtanen, Quasiconformal mappings in the plane. Berlin, Springer—Verlag, 1973. ⁴ В. И. Гаврилов, Мат. сб., т. 67, № 3 (1965). ⁵ J. H. Mathews, Nagoya math. J., v. 39, p. 149—155 (1970). ⁶ P. Lappan, Bull. London Math. Soc., v. 2, № 1 (1970). ⁷ В. И. Гаврилов, ДАН СССР, т. 284, № 6 (1985). ⁸ В. И. Гаврилов, А. Н. Канатников, ДАН СССР, т. 232, № 6 (1977)