УДК 517.55

МАТЕМАТИКА

О. М. Эминян

Граничные особенности пространственных квазимероморфных отображений вдоль касательных путей

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 21/IV 1987)

В статье изучается строение множества граничных особенностей пространственных квазимероморфных отображений, порождаемых предельными множествами этих отображений вдоль касательных граничных путей. Устанавливается, что эти множества имеют такую же структуру, как и мероморфные функции одного комплексного переменного. Основные свойства пространственных квазирегулярных и квазимероморфных отображений можно найти, например, в монографии (1).

1. Условимся о следующих обозначениях. Для произвольной точки $x = (x^1, \dots, x^n)$ евклидова пространства R^n , $n \geq 2$, символом x^0 обозначать ее проекцию в R^{n-1} , так что $x^0 = (x^1, \dots, x^{n-1})$ и $x = (x^0; x^n)$. Через R_+^n обозначим верхнее полупространство $R^n = \{(x^0; x^n) \in R^n : x^n > 0\}$. Граница δR_+^n этого полупространства является $(n-1)$ -мерным евклидовым пространством, которое мы отождествим с R^{n-1} . Как обычно, для двух точек $x, y \in R^n$, $x = (x^1, \dots, x^n)$, $y = (y^1, \dots, y^n)$, обозначим $|x - y| = \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + \dots + (x^n - y^n)^2}$ евклидово расстояние между x и y . Для любых двух точек $x, y \in R_+^n$ обозначим символом $\sigma(x, y)$ расстояние между x и y относительно метрики Пуанкаре в R_+^n . Шар $\{y \in R_+^n; |x - y| < r\}$, $r > 0$, обозначим символом $B(x, r)$; шар в метрике Пуанкаре $\{y \in R_+^n; \sigma(y, x) < r\}$, $r > 0$, — символом $D(x, r)$. Одноточечную компактификацию пространства R^n , $n \geq 2$, обозначим через $\bar{R}^n$, т. е. $\bar{R}^n = R^n \cup \{\infty\}$.

Следующие понятия введены Е. П. Долженко (2). Точку $x \in R^{n-1}$, $n \geq 2$, назовем точкой пористости множества $E \subset R^{n-1}$, если существуют такое число c , $0 < c < 1$, и такая последовательность чисел (r_k) , $r_k > 0$, $k = 1, 2, \dots$, $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = 0$, что в каждом шаре $B^{n-1}(x, r_k)$, $k = 1, 2, \dots$ можно выбрать шар $B^{n-1}(y, \rho_k)$, $\rho_k \geq c \cdot r_k$, $k = 1, 2, \dots$, который не содержит точек из E . Множество, состоящее из своих точек пористости, называется пористым множеством, а объединение не более чем счетного числа пористых множеств называется σ -пористым множеством в R^{n-1} .

Следуя Рангу (3), неотрицательную непрерывную функцию $h(t)$, определенную на отрезке $[0, 1]$, назовем функцией подхода, если

она монотонно возрастает, выпукла вниз на $[0, 1]$ и $h(0)=0$, $h(1)=1$. Обозначим через μ обратную функцию к h ; $\mu(h(t))=t$, $t \in [0, 1]$. Для любого $a > 0$ полагаем $h^a(t) = h\left(\frac{t}{a}\right)$ и рассматриваем обратную к h^a функцию $\mu^a(t) = a + \mu(t)$.

В произвольной граничной точке $\xi \in \partial R_+^n = R^{n-1}$ рассмотрим кривые $L_h(\xi, \zeta, a)$, $a > 0$, $L_h(\xi, \zeta, a) = \{(\xi + \zeta \cdot t; h^a(t)) : t \in [0, a], \zeta \in R^{n-1}, |\zeta|=1\}$, где ζ обозначает произвольный единичный вектор в R^{n-1} .

Обозначим через $A_h(\xi, \zeta, a, b)$, $b > a > 0$ объединение $\cup \{(x^0; \bar{x}^n) \in R_+^n : |x^0 - \bar{x}^n| < \mu^{\frac{b-a}{2}}(\bar{x}^n); (\bar{x}^0; \bar{x}^n) \in L_h\left(\xi, \zeta, \frac{a+b}{2}\right)\}$ всех $(h-1)$ -шаров, параллельных ∂R_+^n , с центрами в точках $(\bar{x}^0, \bar{x}^n) \in L_h\left(\xi, \zeta, \frac{a+b}{2}\right)$

и радиусами $\mu^{\frac{b-a}{2}}(\bar{x}^n)$. Рассмотрим также круговые граничные области $Q_h(\xi, a) = \{(x^0, x^n) \in R_+^n : |x^0 - \xi| < \mu^a(x^n)\}$, $a > 0$

2. Рассмотрим произвольное K -квазиморфное отображение $f \in R^n - \bar{R}^n$, $n \geq 2$, и пусть $l(n, K)$ обозначает универсальную постоянную в теореме типа Пикара, доказанной С. Рикманом (4). Последовательность (x_m) точек $x_m \in R^n$, $m = 1, 2, \dots$ называется P -последовательностью отображения $f(x)$, если для любой ее бесконечной подпоследовательности (x_{m_k}) и любого числа $\varepsilon > 0$ в объединении $\bigcup_k D(x_{m_k}, \varepsilon)$ отображение $f(x)$ принимает бесконечно часто все значения $w \in \bar{R}^n$, за возможным исключением не более, чем $l(n, K)$ значений (в случае $n=2$, $K=1$ это понятие введено В. И. Гавриловым (5); случай произвольных $n \geq 2$, $K \geq 1$ см. в (6)).

Для произвольного множества $S \subset R_+^n$, имеющего предельную точку $\xi \in \partial R_+^n$, обозначим $C(f, \xi, S) = \bigcap_{r>0} \overline{f(B^n(\xi, r)) \cap R_+^n}$, где черта означает замыкание множества в пространстве $\bar{R}^n$. Рассмотрим множество $K_h(f)$ точек $\xi \in \partial R_+^n$, в которых $C(f, \xi, A_h(\xi)) = C(f, \xi, Q_h(\xi))$ для любых областей $A_h(\xi) = A_h(\xi, \zeta, a, b)$ и $Q_h(\xi) = Q_h(\xi, c)$. Точку $\xi \in K_h(f)$ отнесем к множеству $C_h(f)$, если $C(f, \xi, Q_h(\xi)) = C(f, \xi, R_+^n)$. Точку $\xi \in \partial R_+^n$ отнесем к множеству $P_h(f)$, если каждая кривая $L_h(\xi, \zeta, a)$, $a > 0$, содержит P -последовательность отображения $f(x)$, и отнесем к множеству $I_h^*(f)$, если ни одна из кривых $L_h(\xi, \zeta, a)$, $a > 0$, не содержит P -последовательность отображения $f(x)$ и $C(f, \xi, L_h(\xi)) = \bar{R}^n$ для любой кривой $L_h(\xi) = L_h(\xi, \zeta, a)$, $a > 0$. Точку $\xi \in \partial R_+^n$ отнесем к множеству $M_h(f)$, если $C(f, \xi, R_+^n) \neq \bar{R}^n$ и $C(f, \xi, L_h(\xi)) = C(f, \xi, R_+^n)$ для любой кривой $L_h(\xi) = L_h(\xi, \zeta, a)$, $a > 0$. Наконец, точку $\xi \in \partial R_+^n$ отнесем к множеству $L_h(f)$, если $C(f, \xi, L_h(\xi)) = C(f, \xi, L_h^1(\xi)) \neq \bar{R}^n$ для любых $L_h(\xi) = L_h(\xi, \zeta, a_1)$, $L_h^1(\xi) = L_h(\xi, \zeta, a_2)$ и ни одна из кривых $L_h(\xi) = L_h(\xi, \zeta, a)$, $a > 0$, не содержит P -последовательностей отображения $f(x)$. Из этих определений и лемм 1, 2 из (7) заключаем, что

$$C_h(f) \subset K_h(f), L_h(f) \subset K_h(f), M_h(f) \subset C_h(f) \text{ и } M_h(f) \cap I_h^*(f) =$$

$$= M_h(f) \cap P_h(f) = I_h^*(f) \cap P_h(f) = L_h(f) \cap I_h^*(f) = L_h(f) \cap P_h(f) = \Phi.$$

3. В рассматриваемых ниже теоремах мы считаем $h(t) = t^p$, $p \geq 1$ — действительное число.

Теорема 1. При любом $p \geq 1$ для произвольного K -квазимероморфного отображения $f: R_+^n \rightarrow \bar{R}^n$, $n \geq 2$, справедливо представление $\delta R_+^n = M_h(f) \cup P_h(f) \cup I_h^*(f) \cup E$, в котором E — некоторое множество первой категории на δR_+^n .

Теорема 2. При любом $p \geq 1$ для произвольного K -квазимероморфного отображения $f: R_+^n \rightarrow \bar{R}^n$, $n \geq 2$, справедливо вложение $M_h(f) \subset L_h(f)$ и представление $\delta R_+^n = L_h(f) \cup P_h(f) \cup I_h^*(f) \cup E$, в котором E — некоторое ε -пористое множество на δR_+^n .

Замечание 1. При $p = 1$ теорема 1 доказана в (7). Для мероморфных функций, т. е. $n = 2$, $k = 1$, эти результаты восходят к работе В. И. Гаврилова (8), в которой рассматривался случай $p = 1$ и результаты которой с той же методикой были распространены на случай $p > 1$ в статье (9). Такая же схема применена в настоящей статье.

4. Доказательства теоремы 1 и 2 опираются на вспомогательные результаты, для формулирования которых нам нужно ввести неотрицательную функцию $q_f: R_+^n \rightarrow \bar{R} = R^+ \cup \{+\infty\}$, $q_f(x) = \sup \{ |f(x) - f(y)| \cdot |\sigma(x, y)|^{-\alpha} \}$, в которой $\alpha = K^{\frac{1}{1-p}}$ и $\sup$ берется по всем $y \in (R_+^n \setminus \{x\})$.

Лемма 1. Пусть $p \geq 1$ фиксировано. Для того чтобы кривая $L_h(\xi, \zeta, a)$, $a > 0$, не содержала P -последовательностей для K -квазимероморфного отображения $f: R_+^n \rightarrow \bar{R}^n$, необходимо и достаточно, чтобы в некоторой области $A_h(\xi, \zeta, a_1, a_2)$, $a_2 < a < a_1$, функция $q_f(x)$ была ограничена сверху.

Лемма 2. Пусть $p \geq 1$ фиксировано и $\xi \in K_h(f)$ — произвольная точка. Если кривая $L_h(\xi, \zeta, a)$, $a > 0$, не содержит P -последовательностей K -квазимероморфного отображения $f: R_+^n \rightarrow \bar{R}^n$, $n \geq 2$, то $C(f, \xi, L_h(\xi, \zeta, a)) = C(f, \xi, A_h(\xi, \zeta, a_1, b_1))$ для любых $0 < a_1 < b_1$.

Замечание 2. В случае $p = 1$ лемма 1 доказана в (7), лемма 1); ее доказательство в случае $p > 1$ использует простейшие свойства метрики Пуанкаре в R_+^n и лемму 3 из (7). В доказательстве леммы 2 используется лемма 2 из (7). Согласно теореме 3 из (10), для произвольного отображения $g: R_+^n \rightarrow \bar{R}^n$, $n \geq 2$, и произвольной функции подхода $h(t)$ множество $\delta R_+^n \setminus C_h(g)$ имеет первую категорию на δR_+^n .

Обозначим $M = C_h(f) \cap C_h(q_f)$; тогда $\delta R_+^n = M \cup E$, где E — некоторое множество первой категории на δR_+^n . В произвольной точке $\xi \in M$ могут быть реализованы следующие возможности:

$$C(f, \xi, R_+^n) \neq \bar{R}^n \text{ и } C(q_f, \xi, R_+^n) \text{ ограничено;} \quad (1)$$

$$C(f, \xi, R_+^n) = \bar{R}^n \text{ и } C(q_f, \xi, R_+^n) \text{ не ограничено;} \quad (2)$$

$$C(f, \xi, R_+^n) = \overline{R^n} \text{ и } C(q_f, \xi, R_+^n) \text{ ограничено и} \quad (3)$$

$$C(f, \xi, R_+^n) \neq \overline{R^n} \text{ и } C(q_f, \xi, R_+^n) \text{ не ограничено.} \quad (4)$$

Четвертая возможность на самом деле realizоваться не может, поскольку неограниченность множества $C(q_f, \xi, R_+^n)$ влечет за собой, согласно лемме 1, свойство $C(f, \xi, R_+^n) = \overline{R^n}$. Если реализуется возможность (2), то, согласно лемме 1, $\xi \in P_h(f)$. Если реализуется возможность (1) или (3), то, согласно лемме 2, $\xi \in M_h(f)$ или $\xi \in I_h^*(f)$.

Доказательство теоремы 2 проводится аналогично и основано на другой теореме о максималности (см. (10), теорема 1), согласно которой для произвольного отображения $g: R_+^n \rightarrow \overline{R^n}$, $n \geq 2$, и произвольной функции перехода $h(t)$ множество $\varepsilon R_+^n \setminus K_h(g)$ является ε -пористым множеством на ∂R_+^n .

6. Рассмотрим произвольную функцию подхода $h(t)$ для произвольного $a > 0$ функции $h_a(t) = \frac{h(t)}{a}$ и обратную к ней функцию

$\mu_a(t) = \mu(at)$. В произвольной граничной точке $\xi \in \partial R_+^n$ определим кривые $L^h(\xi, \zeta, a)$ так же, как и кривые $L_h(\xi, \zeta, a)$, заменив функцию $h^a(t)$ на $h_a(t)$. Обозначим через $A^h(\xi, \zeta, a, b)$, $b > a > 0$, объединение

$$\bigcup \left\{ \left(\xi + \zeta \cdot \mu_{\frac{a+b}{2}}(x^n); x^n \right) + \frac{b-a}{2} u; u \subset R^{n-1}, u \perp \xi, |u| < 1 \right\} \text{ всех } (n-1)\text{-}$$

шаров с центрами в точках $(\xi + \zeta \cdot \mu_{\frac{a+b}{2}}(x^n); x^n)$ и радиусом $\frac{b-a}{2}$, ортогональных вектору ζ , $\zeta \subset R^{n-1}$, $|\zeta| = 1$.

При $h(t) = t^p$ $p \geq 1$ — действительное, множества кривых $L^h(\xi, \zeta, a)$ и областей $A^h(\xi, \zeta, a, b)$ совпадают с множествами кривых $L_h(\xi, \zeta, a)$ и областей $A_h(\xi, \zeta, a, b)$; при $h(t) \neq t^p$ $p \geq 1$ — действительное, эти множества различны (см. (11)).

Для произвольного K -квазиморфного отображения $f: R_+^n \rightarrow \overline{R^n}$ и множеств $\{L^h(\xi, \zeta, a)\}$, $\{A^h(\xi, \zeta, a, b)\}$ определим множества $K^h(f)$, $C^h(f)$, $P^h(f)$, $I^{h*}(f)$, $M^h(f)$, $L^h(f)$, аналогичные множествам с индексом h внизу, которые были введены в пункте 2. Результаты из пункта 3 обобщаются следующим образом.

Теорема 3. Для произвольной функции подхода $h(t)$ и произвольного K -квазиморфного отображения $f: R_+^n \rightarrow \overline{R^n}$, $n \geq 2$, справедливо представление $\partial R_+^n = M^h(f) \cup P^h(f) \cup I^{h*}(f) \cup E$, в котором E — некоторое множество первой категории на ∂R_+^n .

Такое обобщение возможно в силу того, что теорема 3 из (10) справедлива и для множества $C^h(g)$ при произвольном отображении $g: R_+^n \rightarrow \overline{R^n}$, $n \geq 2$.

Остается не доказанной возможность обобщения теоремы 2 из пункта 3.

Տարածական կվադրատներում արտապատկերման սահմանային
եզակիությունը՝ ըստ շոշափող կորերի

Տարածական կվադրատներում և կվադրատներում արտապատկերումների հիմնական հատկությունները կարելի է գտնել, օրինակ, (1) մենագրությունում:

Ներկա աշխատանքում ուսումնասիրվում է $R_+^n = \{(x^0, x^n) \in R^n; x^n > 0\}$ կիսատարածության ∂R_+^n եզրի նկարագրությունը, կամայական K -կվադրատներում $f: R_+^n \rightarrow R^n$ սահմանային բազմությունների միջոցով, որոնք առաջանում են շոշափող եզրային կորերով: Աշխատանքում նշված լեմմաների 1 և 2 ապացույցների համար ներմուծված է ոչ բացասական $q_f(x) = \sup\{f(x), f(y) \mid c(x, y)\}^2$ ֆունկցիան, որտեղ սուպրեմումը վերցրվում է ըստ բոլոր $y \in R_+^n \setminus \{x\}$ -ի: Պարզվում է, որ ∂R_+^n -ը ունի նույն նկարագրությունը, ինչպիսին ունի մեկ փոփոխականի մերոմորֆ ֆունկցիայի դեպքում:

Աշխատանքի վերջում նշվում է կամայական ֆունկցիաներով մոտեցման և կամայական K -կվադրատներում արտապատկերման միջոցով ∂R_+^n եզրի վերլուծությունը՝ ըստ ∂R_+^n -ի ենթարաբազմությունների:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Ю. Г. Решетняк, Пространственные отображения с ограниченным искажением, Наука, Новосибирск, ² Е. П. Долженко, Изв. АН СССР. Математика, т. 31, № 1 (1967). ³ D. C. Rung, Pacific J. Math. v. 76, № 1 (1978). ⁴ S. Rickman, J. d'Analyse Math., v. 37, № 1 (1980). ⁵ В. И. Гаврилов, Мат. сб., т. 67, № 3 (1965). ⁶ А. А. Симуцев, ДАН СССР, т. 284, № 3 (1985). ⁷ А. А. Симуцев, ДАН СССР, т. 289, № 2 (1986). ⁸ В. И. Гаврилов, ДАН СССР, т. 216, № 1 (1974). ⁹ М. М. Мирзоян, ДАН АрмССР, т. 66, № 5 (1978). ¹⁰ В. И. Гаврилов, А. И. Канатников, С. В. Кравцев и др., ДАН СССР, т. 289, № 4 (1986). ¹¹ Абду Аль-Рахман Хасон, ДАН СССР, т. 260, № 4 (1981).