ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXVI 1988 1

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

А. Е. Аветисян

О полноте некоторых систем целых функций на конечных отрезках

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 4/IX 1987)

В настоящей заметке известные результаты Н. Левинсона ([1]) и Б. Я. Левина ([2]) о полноте системы функций $\{e^{i\lambda_n x}\}$ распространяются на более общие системы $\{E_\rho(\lambda_n u;\mu)\}$, где $E_\rho(z;\mu)=\sum_0^\infty \frac{z^n}{\Gamma\left(\mu+\frac{n}{\rho}\right)}$ —целая функция Миттаг-Леффлера. При этом приходится отдельно рассматривать конкретные интервалы изменения параметра ρ, что приводит к различным формулировкам результатов.

Для любого $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ обозначим через $\Gamma_\sigma(\alpha)$ контур, состоящий из двух отрезков: $\arg z=\pm\alpha$, $0\leqslant|z|\leqslant\sigma^{1/\rho}$.

Теорема 1. *Для того чтобы система функций* $\{E_\rho(\lambda_k x;\mu)\}$ $(\rho>1,\ \mu>0)$, *в которой* $\lambda_k(k=1,2,\dots)$ *комплексные числа, не была полна в* $L^p(\Gamma_\sigma(\alpha))$ $(p\geqslant1)$, *необходимо и достаточно, чтобы существовала целая функция* $f(\lambda)$, *обращающаяся в нуль во всех точках* λ_k *и допускающая представление*

$$f(\lambda)=\int\limits_{\Gamma_\sigma(\alpha)}E_\rho(\lambda u;\mu)g(u)\,du,$$

где $g(u)\in L^q(\Gamma_\sigma(\alpha))$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ *(при* $p=1$ $g(u)$*—ограниченная измеримая функция).*

На основании теоремы 1 можно получить различные достаточные условия полноты системы $\{E_\rho(\lambda_n u;\mu)\}$.

1°. Полнота в $L^p(0,\sigma^{1/\rho})$.

Теорема 2. *Пусть* $\{\lambda_k\}_1^\infty$*—множество корней целой функции* $\varphi(\lambda)$ *порядка* $\rho>\frac{1}{2}$ *и конечного типа. Пусть далее ее индикатор* $h_\varphi(\theta)$ *удовлетворяет условию*

$$h_\varphi(0)\geqslant\sigma \tag{1}$$

и для некоторого $m>0$ *и* $p>2$

$$|\varphi(re^{i\theta})|>\frac{m}{(1+r)^{1/p}}\quad \text{для}\quad |\theta|\geqslant\frac{\pi}{2\rho}. \tag{2}$$

Тогда система $\{E_\rho(\lambda_n u;\mu)\}_1^\infty$ $\left(\mu=\frac{p-1+\rho}{p\rho}\right)$ *полна в* $L^p(0,\sigma^{1/p})$.

Некоторое усиление условия (1) делает условие (2) излишним.

Теорема 3. *Если* $\{\lambda_n\}_1^\infty$ *— множество корней целой функции* $\varphi(\lambda)$ *порядка* $\rho\left(\frac{1}{2}<\rho<1\right)$, *конечного типа и*

$$\varliminf_{r\to\infty}|\varphi(re^{i\theta})|e^{-\sigma r^\rho\cos\theta\rho}>0,\quad |\theta|\leqslant\pi-\frac{\pi}{2\rho},$$

то система $\{E_\rho(\lambda_n u;\mu)\}_1^\infty$ $\left(\mu=\frac{p\rho-\rho+1}{p\rho}\right)$ *полна в* $L^p(0,\sigma^{1/p})$ $(p>1)$.

При $\rho\geqslant1$ справедлива

Теорема 4. *Если* $\{\lambda_n\}_1^\infty$ *— множество корней целой функции* $\varphi(\lambda)$ *порядка* $\rho(\rho\geqslant1)$, *конечного типа и*

$$\varliminf_{r\to\infty}|\varphi(r)|e^{-\sigma r^\rho}>0,$$

$$|\varphi(re^{i\theta})|>\frac{m}{(1+r)^{1/p}}\ \text{для}\ |\theta|\geqslant\frac{\pi}{\rho}\quad(p>1),$$

то система $\{E_\rho(\lambda_n;\mu)\}_1^\infty$ $\left(\mu=\frac{p\rho-\rho+1}{p\rho}\right)$ *полна в* $L^p(0,\sigma^{1/p})$ $(p>1)$.

2°. Полнота в $L^p(-\sigma^{1/p},\sigma^{1/p})$.

Теорема 5. *Пусть* $\{\lambda_n\}_1^\infty$ *— множество корней целой функции порядка* $\rho(\rho\geqslant1)$ *и конечного типа.*

Пусть далее

$$h_\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)\geqslant\sigma,\qquad h_\varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right)\geqslant\sigma \tag{3}$$

и для некоторого $m>0$ *и* $p\geqslant2$

$$|\varphi(re^{i\theta})|>\frac{m}{(1+r)^{1/p}}\ \text{для}\ |\theta|\leqslant\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho},\ |\theta-\pi|\leqslant\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}. \tag{4}$$

Тогда система $\{E_\rho(\lambda_n u;\mu)\}_1^\infty$ $\left(\mu=\frac{p-1+\rho}{p\rho}\right)$ *полна в* $L^p(-\sigma^{1/p},\sigma^{1/p})$.

И здесь, если условие (3) заменить несколько более сильным, при $1\leqslant\rho<2$ условие (4) становится лишним.

Теорема 6. *Если* $\{\lambda_n\}_1^\infty$ *— множество корней целой функции* $\varphi(\lambda)$ *порядка* $\rho(1\leqslant\rho<2)$, *конечного типа и*

$$\varliminf_{r\to\infty}|\varphi(re^{i\theta})|e^{-\sigma r^\rho\cos\rho\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}>0\ \text{при}\ \frac{\pi}{2\rho}\leqslant|\theta|\leqslant\pi-\frac{\pi}{2\rho},$$

то система функций $\{E_\rho(\lambda_n u;\mu)\}_1^\infty$ $\left(\mu=\frac{p\rho-\rho+1}{p\rho}\right)$ *полна в* $L^p(-\sigma^{1/p},\sigma^{1/p})$ $(p>1)$.

В случае $\rho>2$ справедлива

Теорема 7. *Если* $\{\lambda_n\}_1^\infty$ *— множество корней целой функции* $\varphi(\lambda)$ *порядка* $\rho>2$, *конечного типа и*

$$\varliminf_{y\to\pm\infty} |\varphi(iy)|e^{-\sigma|y|^\rho}>0,$$

$$|\varphi(re^{i\theta})|>\frac{m}{(1+r)^{1/p}} \quad \text{для} \quad |\theta|\leqslant\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho},\ |\theta-\pi|\leqslant\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}, \tag{5}$$

то система функций $\{E_\rho(i\lambda_n u;\mu)\}_1^\infty$ $\left(\mu=\dfrac{p\rho-\rho+1}{p\rho}\right)$ *полна в* $L^p(-\sigma^{1/\rho}, \sigma^{1/\rho})$.

Замечание. При $\rho=2$ заключение теоремы 7 остается в силе, если неравенство (5) имеет место при $|\theta|<\delta$ и $|\theta-\pi|<\delta$ для некоторого $\delta>0$.

3°. Полнота в $L^p(\Gamma_\sigma)$. Приведем, наконец, теоремы о полноте в $L^p(\Gamma_\sigma)$, где $\Gamma_\sigma=\Gamma_\sigma\left(\dfrac{\pi}{2\rho}\right)$.

Теорема 8. *Пусть* $\{\lambda_k\}_1^\infty$ *—множество корней целой функции* $\varphi(\lambda)$ *порядка* $\rho\geqslant1$, *конечного типа. Пусть далее*

$$h_\varphi\left(\frac{\pi}{2\rho}\right)\geqslant\sigma,\quad h_\varphi\left(-\frac{\pi}{2\rho}\right)\geqslant\sigma$$

и

$$|\varphi(re^{i\theta})|>\frac{m}{(1+r)^{1/p}} \quad \text{для} \quad |\theta|\geqslant\frac{\pi}{\rho},\ \theta=0\ (p\geqslant2).$$

Тогда система $\{E_\rho(\lambda_k u;\mu)\}_1^\infty$ $\left(\mu=\dfrac{p-1+\rho}{p\rho}\right)$ *полна в* $L^p(\Gamma_\sigma)$.

Теорема 9. *Пусть* $\{\lambda_n\}_1^\infty$ *—множество корней целой функции* $\varphi(\lambda)$ *порядка* $\rho\left(1\leqslant\rho\leqslant\dfrac{3}{2}\right)$, *конечного типа. Пусть далее*

$$\varliminf_{r\to\infty}|\varphi(re^{i\theta})|e^{-\sigma r^\rho\sin\rho\theta}>0 \quad \text{при} \quad \frac{\pi}{2\rho}\leqslant|\theta|\leqslant\pi-\frac{\pi}{2\rho}.$$

Тогда система $\{E_\rho(\lambda_n u;\mu)\}_1^\infty$ $\left(\mu=\dfrac{p\rho-\rho+1}{p\rho}\right)$ *полна в* $L^p(\Gamma_\sigma)$ $(p>1)$.

Теорема 10. *Пусть* $\{\lambda_n\}_1^\infty$ *—множество корней целой функции* $\varphi(\lambda)$ *порядка* $\rho\left(\rho>\dfrac{3}{2}\right)$, *конечного типа. Пусть далее*

$$\varliminf_{r\to\infty}|\varphi(re^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}})|e^{-\sigma r^\rho}>0,$$

$$|\varphi(re^{i\theta})|>\frac{m}{(1+r)^{1/p}} \quad \text{при} \quad |\theta|\geqslant\frac{3\pi}{2\rho},$$

$$h_\varphi(0)=0.$$

Тогда система $\{E_\rho(\lambda_n u;\mu)\}_1^\infty$ $\left(\mu=\dfrac{p\rho-\rho+1}{p\rho}\right)$ *полна в* $L^p(\Gamma_\sigma)$ $(p>1)$.

Ереванский институт народного хозяйства

Ա. Ե. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ

Ամբողջ ֆունկցիաների որոշ համակարգերի լրիվության մասին՝ վերջավոր հատվածների վրա

Ներկա աշխատանքում Ն. Լևինսոնի և Բ. Յա. Լևինի որոշ հայտնի արդյունքներ $\{e^{i\lambda_n x}\}$ համակարգի լրիվության մասին տարածվում են ավելի ընդհանուր $\{E_\rho(\lambda_n z; \mu)\}$ համակարգերի վրա։ Բերվող թեորեմներում ենթադրվում է, որ $\{\lambda_n\}$ բազմությունը մի $\varphi(z)$ ամբողջ ֆունկցիայի զրոների բազմությունն է, ընդ որում, այդ ֆունկցիայի վրա դրվում են որոշակի պայմաններ, որոնք սահմանափակում են նրա աճը ներքևից ամբողջ կոմպլեքս հարթության մեջ կամ նրա մի մասում։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *N. Levinson*, Gap and density theorems. American Math. Soc. coll. Publications, New York, 1940. [2] *Б. Я. Левин*, Распределение корней целых функций, Гос. изд. техн. теоретич. лит., М., 1956.