

УДК 517.8

МАТЕМАТИКА

Л. Э. Джанджулян

Оценка стабильности турнирного упорядочения алгоритмов управления в играх

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 17/IX 1987)

1. Рассматриваются вопросы реализации процедуры адаптивного синтеза алгоритмов управления в конечных антагонистических позиционных играх с полной информацией, например, в шахматах. В (1) (см. также (2)) предложена процедура (метод локальных турниров), синтезирующая оптимальные игровые алгоритмы на основе порождения наборов алгоритмов и их сравнения. Победитель кругового турнира, проводимого среди всех игровых алгоритмов, выявляется путем проведения последовательности турниров с малым числом участников в каждом из таких наборов (локальных турниров). Процедура опирается на следующую гипотезу о стабильности турнирного упорядочения. Для произвольного игрового алгоритма, занявшего место i в турнире, можно указать константу b_i такую, что влево от окрестности $[i-b_i, i+b_i]$, как правило, алгоритм только проигрывает, вправо — выигрывает, а в самой окрестности может как выигрывать, так и проигрывать. Вообще говоря, гипотеза эффективна, когда число b , равное максимальному значению всех b_i и определяющее число участников локальных турниров, значительно меньше числа τ мест в турнирном упорядочении. В связи с этим представляет интерес изучение соотношения параметров b и τ .

В настоящей работе исследовано указанное соотношение. Показано, что при детерминированной трактовке гипотезы о стабильности в определенном подклассе игр величины b и τ сопоставимы.

2.1 Конечные антагонистические позиционные игры с полной информацией однозначно определяются игровым деревом и весовой функцией выигрыша на его заключительных позициях (3). Обозначим $\mathcal{A}$ класс этих игр.

Рассмотрим произвольную игру A из класса $\mathcal{A}$. В игровом дереве D_A множество заключительных позиций обозначим $\mathcal{P}_e$, остальные позиции образуют множество $\mathcal{P}$. Весовая функция $\varphi_A : \mathcal{P}_e \rightarrow \{0, 1/2, 1\}$ определяет выигрышность заключительных позиций. Игра может начинаться из произвольной позиции P . (Это несущественно изменяет традиционное определение).

Последовательность позиций $P, P_1, \dots, Q$ назовем *веткой* и будем обозначать $v(P, Q)$, если она является связной частью некоторой партии. Длина ветки $v(P, Q)$ равна числу $|v(P, Q)|$ ходов в этой части партии. Ветка $v^*(P, Q)$ *заключительная*, если $Q \in \mathcal{P}_e$.

Величину $|A| = \max_{Q \in \mathcal{P}_e} |v^*(P, Q)|$ назовем *высотой игры* A . Мно-

жество позиций $\mathcal{P}_i$ в дереве D_A (игре A), достижимых из P_0 за $(i-1)$ полуходов, назовем i -м *ярусом*. Позиции, полученные из не-
заключительной позиции P за один ход, образуют множество $V(P)$,
а все заключительные позиции, достижимые из P —множество $\mathcal{P}_e(P)$.

P -стратегией G , $P \in \mathcal{P}$, назовем произвольное поддереву D_A с
корнем P , в котором из произвольной незаключительной позиции
яруса (G) с нечетным номером исходит ровно одно ребро, а из не-
заключительных позиций ярусов (G) с четными номерами—все до-
пустимые ребра. (Это определение соответствует определению зак-
лючительной P -стратегии в $(^2)$). Множество всех P -стратегий обоз-
начим $\mathcal{G}(P)$. *Мерой выигрышности* P -стратегий назовем оператор
 $\Phi: \mathcal{G}(P) \rightarrow [0, 1]$, $P \in \mathcal{P}$. P -стратегия G^* называется *оптимальной*, если
 $\Phi(G^*) = \max_{G \in \mathcal{G}(P)} \Phi(G)$. *Мера позиции* P есть мера оптимальной P -страте-

гии. Элементы множества $F_A = \{f | f: \mathcal{P} \rightarrow \bigcup_{P \in \mathcal{P}} \mathcal{G}(P) \& f(P) \in \mathcal{G}(P)\}$ назовем

играющими функциями. (Рассмотренные в $(^2)$ алгоритмы управления
являются машинной реализацией функций множества F_A .)

2.2. *Абсолютным турниром* играющих функций F_A назовем
круговой турнир на множестве всех позиций $\mathcal{P}$ такой, что в произ-
вольной позиции P , $P \in \mathcal{P}$, каждая пара играющих функций встреча-
ется два раза, изменяя при этом право первого хода. Множество
всех игр абсолютного турнира, проведенных между двумя играющи-
ми функциями, назовем *матчем*. В матче играющих функций f и g
 f проигрывает g ($f < g$), если f набирает меньшее число очков. По ре-
зультатам турнира для каждой играющей функции подсчитывается зна-

чение абсолютного коэффициента: $a(f) = \frac{1}{|\mathcal{P}|} \sum_{P \in \mathcal{P}} \left(\frac{1}{|F_A|} \sum_{g \in F_A} a(f, g, P) \right)$,

где f —произвольная играющая функция из F_A , а $a(f, g, P)$ —результат партии f с g в позиции P . Результатом такого турнира является
абсолютное упорядочение множества играющих функций F_A по зна-
чению коэффициента a . Играющие функции, занявшие первое место
в турнире, называются *оптимальными*. Число мест в абсолютном
упорядочении F_A назовем *длиной абсолютного упорядочения* и
обозначим τ_A .

Зоной неустойчивости в турнирном упорядочении играющих
функций назовем отрезок $[i, j]$ максимальной длины такой, что ка-
кая-либо играющая функция, занявшая в абсолютном упорядочении
место i , проигрывает матч какой-либо играющей функции, занявшей
место j . Обозначим b_A длину зоны неустойчивости.

2.3. *Турнирной мерой* выигрышности $a(G)$ P -стратегии G назо-
вем величину $\frac{1}{|\mathcal{G}(P)|} \sum_{G' \in \mathcal{G}(P)} a(G, G')$, где PP' —ход G , $a(G, G')$ —

результат партии G с G' . Если PP' —ход P -стратегии G , то $a(G) =$
 $= \sum_{R \in V(P')} a(G(R)) \cdot k_R$, $\sum_{R \in V(P')} k_R = 1$, где $G(R)$ —подстратегия G с корнем

R и $k_R = \frac{|\mathcal{G}(P'R)|}{|\mathcal{G}(P')|}$, где $\mathcal{G}(P'R)$ — множество P' -стратегий с первым

ходом $P'R$. Для произвольной играющей функции f $a(f) = \frac{1}{|\mathcal{P}|} \sum_{P \in \mathcal{P}} a(f(P))$.

Поэтому произвольная играющая функция f^* оптимальна тогда и только тогда, когда все стратегии $f^*(P)$, $P \in \mathcal{P}$, оптимальны.

Введем следующие обозначения: $\alpha_P = \min_{G \in \mathcal{G}(P)} a(G)$, $\beta_P = \max_{G \in \mathcal{G}(P)} a(G)$,

$P \in \mathcal{P}$, $\bar{a}(f) = a(f) \cdot |\mathcal{P}|$, $f \in F_A$, и $\bar{\alpha}_A = \min_{f \in F_A} \bar{a}(f)$, $\bar{\beta}_A = \max_{f \in F_A} \bar{a}(f)$.

3.1. Будем рассматривать подклассы игр из $\mathcal{A}$:

$A \in \mathcal{A}_1 \leftrightarrow (A \in \mathcal{A} \& (\forall P \in \mathcal{P} (\exists Q_1 \in \mathcal{P}_e \cap V(P) \rightarrow (\exists Q_2 \in \mathcal{P}_e \cap V(P) \& \varphi_A(Q_1) \neq \varphi_A(Q_2))))))$,

$A \in \mathcal{A}(p) \leftrightarrow (A \in \mathcal{A} \& p \geq 2(\forall P \in \mathcal{P} |V(P)| = p))$ и $\mathcal{A}_1(p) \equiv \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}(p)$.

Для произвольной игры $A \in \mathcal{A}$ определим следующие множества: $S_i = \{P \in \mathcal{P} | \exists P' \in V(P) \min_{Q \in \mathcal{P}_e(P)} |v^*(P', Q)| = i-1\}$, $1 \leq i \leq_1 A_1$, и $S_0 = \mathcal{P}_e$. Для зна-

чений i , близких $_1 A_1$, может быть $S_i = \emptyset$. Нетрудно заметить, что найдется такой индекс I_A , что $S_i \neq \emptyset$, если и только если $0 \leq i \leq I_A \leq_1 A_1$.

Множества S_1 образуют позиции, из которых за один ход можно попасть в заключительную позицию.

Рассмотрим множества $X_A = \{P \in S_1 | V(P) \cap S_1 \neq \emptyset\}$, $\bar{S}_1 = \{P \in S_1 | V(P) \subset \mathcal{P}_e\}$.

Класс игр $\bar{\mathcal{A}}$ из $\mathcal{A}$, удовлетворяющих условию $X_A = \emptyset$, обозначим $\bar{\mathcal{A}}$. Тогда $\bar{\mathcal{A}}_1 \equiv \mathcal{A}_1 \cap \bar{\mathcal{A}}$, $\bar{\mathcal{A}}(p) \equiv \mathcal{A}(p) \cap \bar{\mathcal{A}}$ и $\bar{\mathcal{A}}_1(p) \equiv \mathcal{A}_1(p) \cap \bar{\mathcal{A}}$. По определению в играх $A \in \bar{\mathcal{A}}$ $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

Лемма 1. В играх $A \in \bar{\mathcal{A}}(p)$, $I_A \geq 3$, $|S_1| < (p^2 + 1)|S_3| + p - 1$.

Лемма 2. В играх $A \in \bar{\mathcal{A}}(p)$, $I_A \geq 3$, $|\bar{S}_1| > p|S_3|$.

Лемма 3. В играх $A \in \bar{\mathcal{A}}$ $|S_1| \leq |\mathcal{P}| < 2|S_1|$.

3.2. Теорема. В играх $A \in \bar{\mathcal{A}}_1(p)$ при $I_A > \bar{\tau}$ и $p > 4 \frac{\bar{\tau}_A}{b_A} \leq 84p^2$.

Доказательство.

Лемма 4. В играх $A \in \mathcal{A}_1$ $\frac{1}{2}|S_1| < \bar{\beta}_A - \bar{\alpha}_A < 2|S_1|$.

Оценим снизу длину зоны неустойчивости в классе игр $\bar{\mathcal{A}}_1(p)$.

Пусть в произвольной игре A b_A есть разность номеров мест, которые заняли в абсолютном турнире играющие функции $\bar{g}$ и $\bar{f}$,

$\bar{f} < \bar{g}$. Покажем, что если $A \in \mathcal{A}_1(p)$, то $\bar{a}(\bar{f}) - \bar{a}(\bar{g}) \geq \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{p}\right)|S_3|$. Точ-

нее, построим две играющие функции f_0 и g_0 такие, что $f_0 < g_0$ и

$\bar{a}(f_0) - \bar{a}(g_0) \geq \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{p}\right) \cdot |S_3|$.

Пусть A — произвольная игра из класса $\mathcal{A}_1$, и пусть $P \in \mathcal{P}$. Выберем P -стратегию G_1 такую, что все ее заключительные ходы сильнейшие. Заменяя все заключительные ходы G_1 на слабейшие (в

классе игр $\mathcal{A}_1$ это всегда возможно), получим P -стратегию G_2 . Возможны два случая:

1) какую бы стратегию $G_1 \in \mathcal{G}(P)$ мы ни выбрали, $a(G_1) - a(G_2) < \frac{1}{2}$;

2) найдется стратегия $\bar{G}_1 \in \mathcal{G}(P)$ такая, что $a(\bar{G}_1) - a(G_2) \geq \frac{1}{2}$;
стратегию $\bar{G}_1$ назовем „хорошей“.

Лемма 5. Пусть $A \in \mathcal{A}_1$, $P \in \mathcal{P}$ и $P' \in V(P)$. По крайней мере в одном из множеств $\mathcal{G}(PP')$ и $\mathcal{G}(P')$ найдется „хорошая“ стратегия.

Лемма 6. Пусть $A \in \mathcal{A}_1$. В множестве $\mathcal{P}$ найдутся по крайней мере $|S_3|$ позиции P с „хорошей“ P -стратегией, длина минимальной ветви которой больше двух.

Рассмотрим произвольную „хорошую“ стратегию $G_1 \in \mathcal{G}(P)$, $P \in \mathcal{P}$. Заменяем один из заключительных ходов G_1 на худший, тот же ход в G_2 заменим на наилучший. Полученные стратегии обозначим G'_1 и G'_2 , соответственно. В ряде случаев эти замены приводят к незначительному изменению мер стратегий.

Лемма 7. Пусть $A \in \mathcal{A}_1(p)$. В $\mathcal{P}$ найдутся по крайней мере $|S_3|$ позиций P с „хорошей“ P -стратегией G_1 и P -стратегией G'_1 и выполнится $a(G'_1) - a(G'_2) \geq \frac{1}{2} - \frac{2}{p}$.

Указанные выше играющие функции f_0 и g_0 , $f_0, g_0 \in F_A$, $A \in \mathcal{A}_1(p)$, определим следующим образом. В позициях P , полученных в лемме 7, выбираем $f_0(P) = G'_1$, $g_0(P) = G'_2$. Учитывая условие согласования стратегий f_0 и g_0 по ярусам, в остальных позициях игры определим f_0 и g_0 произвольными, но одинаковыми.

Получим теперь необходимую оценку.

В позициях S_1 играющие функции f_0 и g_0 были определены произвольно. Поскольку в позициях $P \in S_1$ $\beta_P - \alpha_P \geq \frac{1}{2}$, то, варьируя значение мер $f_0(P) = g_0(P)$, $P \in S_1$, можно изменять значение коэффициентов $\bar{a}(f_0)$ и $\bar{a}(g_0)$ в довольно широких пределах внутри отрезка $[\alpha_A, \beta_A]$. Однако фиксированный выбор стратегий в части позиций не позволяет приблизить $\bar{a}(f_0)$ к β_A или $\bar{a}(g_0)$ к α_A . Длины зон недостижимости значений коэффициента $\bar{a}(f_0)$ и $\bar{a}(g_0)$ не превосходят $3|S_3|$, поэтому из леммы 2 следует, что наиболее плотны значения коэффициента играющих функций, расположенные вне зон недостижимости. Т. е. отрезок длины $(\bar{a}(f_0) - \bar{a}(g_0) - 1)$, лежащий внутри $[\alpha_A, \beta_A]$ и содержащий максимальное число q точек-значений коэффициента $\bar{a}$ играющих функций, не пересекается с зонами недостижимости. Определим f_0 и g_0 так, чтобы $[\bar{a}(g_0), \bar{a}(f_0)]$ содержал указанный отрезок в себе. Тогда $b_A \geq q$ по леммам 1 и 4 с учетом оценки, полученной для $\bar{a}(f_0) - \bar{a}(g_0)$,

$$\tau_A \leq \left\lceil \frac{\bar{\beta}_A - \bar{\alpha}_A}{\bar{a}(f_0) - \bar{a}(g_0) - 1} \right\rceil \cdot q \leq \left\lceil 2 \frac{(p^2 + 1)|S_3| + p - 1}{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{p}\right)|S_3| - 1} \right\rceil \cdot q.$$

Откуда $\tau_A \leq 84p^2 \cdot q$ и $\tau_A/b_A \leq 84p^2$ при $I_A > 7$ и $p > 4$.

Теорема доказана.

4. Поскольку величина τ_A имеет порядок числа всех играющих функций, то в теореме фактически показано, что при принятом детерминированном определении для больших значений p в классе игр $\overline{\mathcal{A}}_1(p)$ длина зоны неустойчивости мало отличается от длины абсолютного упорядочения, т. е. применение гипотезы метода локальных турниров ⁽¹⁾ в детерминированной трактовке неэффективно. Поэтому реальное сравнение силы игровых алгоритмов, оценка отдельных игровых алгоритмов и синтез оптимального алгоритма методом локальных турниров должны иметь вероятностный характер.

На следующем этапе предполагается исследование соотношения параметров длины зоны неустойчивости и длины абсолютного упорядочения в исходной, т. е. вероятностной, формулировке гипотезы о стабильности.

В заключение автор выражает глубокую благодарность научному руководителю Э. М. Погосяну за обсуждение и ряд ценных советов на разных стадиях исследования. Автор признателен всем участникам семинара «Познавательные алгоритмы и экспертные системы» ВЦ АН Армянской ССР и ЕГУ за плодотворное обсуждение работы.

Вычислительный центр Академии наук
Армянской ССР и Ереванского государственного
университета

Լ. Է. ԶԱՆԶՈՒԼՅԱՆ

Խաղերում դեկավարման ալգորիթմների տուրնիրային կարգավորման կայունության գնահատումը

Դիտարկված են շախմատի տիպի խաղերում դեկավարման ալգորիթմների ադապտիվ սինթեզի պրոցեդուրայի իրագործման հարցերը: Պրոցեդուրայի էֆեկտիվությունը հիմնվում է հետևյալ հիպոթեզի վրա. գոյություն ունի այնպիսի մի b փոքր թիվ, որ կամայական խաղային ալգորիթմ կարող է պարտություն կրել ըստ տուրնիրային կարգավորման ավելի թույլ ալգորիթմից այն դեպքում, երբ նրանց միջև եղած հեռավորությունը տուրնիրային կարգավորման մեջ չի գերազանցում b -ից: Նկարագրված է խաղերի մի դաս, որոնց համար հիպոթեզի դետերմինիստական մեկնաբանության դեպքում b թիվը համեմատելի է կարգավորման մեջ տեղերի քանակի հետ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Э. М. Погосян, Адаптация комбинаторных алгоритмов, Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1983. ² Э. М. Погосян, Тезисы докл. Всесоюз. конф. «Математические методы распознавания образов», Дилижан, 16—21 мая, 1985. ³ Г. Оуэн, Теория игр, Мир, М., 1971.