ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXV 1987 4

УДК 539.3

МЕХАНИКА

С. Г. Саакян

Независимые скалярные уравнения движения некоторых радиально-неоднородных изотропных упругих сред

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 27/VI 1987)

В работе рассмотрено разложение вектора перемещения в обобщенных потенциалах, допускающее в некоторых случаях разделение векторного уравнения радиально-неоднородой изотропной упругой среды на независимые скалярные дифференциальные уравнения второго порядка. На основании полученных результатов определены свойства некоторых радиально-неоднородных изотропных упругих сред и приводятся независимые скалярные уравнения движения.

Волновые процессы в неоднородной изотропной упругой среде с коэффициентами Ламе λ, μ и массовой плотностью ρ описываются векторым уравнением [1]

$$(\lambda+2\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u}-\mu\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{u}+\operatorname{grad}\lambda\cdot\operatorname{div}\vec{u}+$$
$$+\operatorname{grad}\mu\times\operatorname{rot}\vec{u}+2\operatorname{grad}\mu\cdot\operatorname{grad}\vec{u}=\rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}, \tag{1}$$

где $\vec{u}$ — вектор перемещения.

Представим осесимметричное решение уравнения (1) в сферических координатах (r, θ, φ) для радиально-неоднородной среды, т. е. при λ, μ, ρ, зависящих только от координаты r, разложением

$$\vec{u}=\psi_1(r)\operatorname{grad}\Phi_1(r,\theta,t)+\psi_2(r)\operatorname{rot}\operatorname{rot}[\Phi_2(r,\theta,t)\vec{e}_r]+\operatorname{rot}[\Phi_3(r,\theta,t)\vec{e}_r], \tag{2}$$

где Φ_1, Φ_2, Φ_3 — обобщенные потенциалы; $\psi_1(r)$, $\psi_2(r)$ — неизвестные функции, зависящие только от r; $\vec{e}_r$ — орт по оси r.

Разложение (2) подставим в уравнение (1). После некоторых преобразований получим

$$\varphi_1\operatorname{grad}[\varphi_1^{-1}\psi_1\xi L_1(\Phi_1)]+\varphi_2\operatorname{rot}\operatorname{rot}[\varphi_2^{-1}\psi_2\mu L_2(\Phi_2)\vec{e}_r]+$$
$$+\operatorname{rot}[\mu L_3(\Phi_3)\vec{e}_r]+\left[l_{11}\Delta\Phi_1+l_{12}\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}+l_{13}\Phi_1-l_{14}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t^2}\right]\vec{e}_r+ \tag{3}$$
$$+\vec{e}_r\times\operatorname{rot}\left\{\left[l_{21}\Delta\Phi_2+l_{22}\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}+l_{23}\Phi_2-l_{24}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial t^2}\right]\vec{e}_r\right\}=\vec{0}.$$

В (3) приняты обозначения:

$$L_1(\Phi_1) \equiv \Delta\Phi_1 + \gamma^{-1}[(\gamma+1)p_1 + 2p_\mu]\frac{\partial\Phi_1}{\partial r} + \gamma^{-1}\left(p_1' + p_1^2 + p_1 p_\mu - \frac{2p_\mu}{r}\right)\Phi_1 - $$
$$-v_1^{-2}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t^2}; \quad (4)$$

$$L_2(\Phi_2) \equiv \Delta\Phi_2 + \left[(\gamma+1)p_2 + 2p_\mu - \frac{2}{r}\right]\frac{\partial\Phi_2}{\partial r} + \left[(\gamma p_2)' + \gamma p_2 p_\mu + \gamma p_2^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{2}{r}(\gamma p_2 + 2p_\mu)\right]\Phi_2 - v_2^{-2}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial t^2}; \quad (5)$$

$$L_3(\Phi_3) \equiv \Delta\Phi_3 + \left(p_\mu - \frac{2}{r}\right)\frac{\partial\Phi_3}{\partial r} - \frac{2p_\mu}{r}\Phi_3 - v_2^{-2}\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial t^2}; \quad (6)$$

$$p_1 = \psi_1'/\psi_1,\ p_2 = \psi_2'/\psi_2,\ p_\mu = \mu'/\mu,\ p_\rho = \rho'/\rho,\ v_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho,\ v_2^2 = \mu/\rho,\ \gamma = \frac{v_1^2}{v_2^2}; \quad (7)$$

$$l_{11} \equiv \xi\varphi_1'\varphi_1^{-1}\psi_1 - \mu\psi_1' - 2\mu'\psi_1;\quad l_{21} \equiv \mu\varphi_2'\varphi_2^{-1}\psi_2 - \xi\psi_2' - 2\mu'\psi_2;$$

$$l_{12} \equiv \xi\varphi_1'\varphi_1^{-1}\psi_1\gamma^{-1}[(\gamma+1)p_1 + 2p_\mu] - 2(\mu\psi_1')' - 2\mu'\psi_1' + \frac{2}{r}(\mu\psi_1' - \mu'\psi_1) - 2\mu''\psi_1;$$

$$l_{22} \equiv \mu\varphi_2'\varphi_2^{-1}\psi_2\left[(\gamma+1)p_2 + 2p_\mu - \frac{2}{r}\right] - 2(\xi'\psi_2' + \xi\psi_2' + \mu''\psi_2 + \mu'\psi_2') +$$
$$+ \frac{4}{r}(\xi\psi_2' + \mu'\psi_2) + \frac{2}{r}\mu'\psi_2;$$

$$l_{13} \equiv \xi\varphi_1\varphi_1^{-1}\psi_1\gamma^{-1}\left(p_1' + p_1^2 + p_1 p_\mu - \frac{2}{r}p_\mu\right) - (\mu\psi_1')'' + \frac{2}{r}(\mu''\psi_1 + 2\mu'\psi_1') - \frac{2}{r^2}\mu'\psi_1;$$

$$l_{23} \equiv \mu\varphi_2'\varphi_2^{-1}\psi_2\left[(\gamma p_2)' + \gamma p_2 p_\mu + \gamma p_2^2 - \frac{2}{r}(\gamma p_2 + 2p_\mu)\right] - (\xi\psi_2')'' +$$
$$+ \frac{2}{r}(\xi'\psi_2' + \xi\psi_2' + 2\mu''\psi_2 + 2\mu'\psi_2') - \frac{2}{r^2}(\xi\psi_2' + 2\mu'\psi_2);$$

$$l_{14} \equiv \rho\varphi_1'\varphi_1^{-1}\psi_1 - (\rho\psi_1)';\quad l_{24} \equiv \rho\varphi_2'\varphi_2^{-1}\psi_2 - (\rho\varphi_2)';$$

$$\Delta \equiv \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta};\quad \xi = \lambda + 2\mu.$$

Неизвестные функции $\varphi_i(r)$, $\psi_i(r)$ определим из условий

$$l_{ij} = 0,\quad i = 1, 2;\quad j = 1, 2, 3, 4, \quad (8)$$

при выполнении которых правая часть уравнения (3) является суммой линейно независимых векторов. Поэтому уравнение (3) разделяется на независимые уравнения для потенциалов Φ_1, Φ_2, Φ_3:

$$\operatorname{grad}[\varphi_1^{-1}\psi_1\xi L_1(\Phi_1)] = \vec{0};\quad \operatorname{rot}\operatorname{rot}[\varphi_2^{-1}\psi_2\mu L_2(\Phi_2)\vec{e}_r] = \vec{0}$$

$$\operatorname{rot}[\mu L_3(\Phi_3)\vec{e}_r] = \vec{0}.$$

Выражения $L_i(\Phi_i)$, $i = 1, 2, 3$, являются некоторыми функциями от координаты r и времени t, т. е.

$$L_i(\Phi_i) = f_i(r, t). \quad (9)$$

Легко показать, что простой заменой потенциала Φ_i всегда можно правую часть (9) приравнять нулю. Не вводя новые обозначения, предположим, что потенциал Φ_i удовлетворяет этому условию. Тогда для радиально-неоднородной изотропной упругой среды имеем независимые скалярные уравнения движения

$$L_i(\Phi_i)=0, \quad i=1,\,2,\,3. \tag{10}$$

Условия разделения (8) векторного уравнения движения на независимые скалярные уравнения (10) эквивалентны системе уравнений

$$q_i=p_\rho+p_i; \quad q_i=\psi_i'/\psi_i; \quad i=1,\,2; \tag{11}$$

$$p_1+p_2+p_\rho=0; \quad \mu p_1+\lambda p_2+2\mu'=0; \tag{12}$$

$$(\mu p_1)'+\mu p_1^2-\frac{1}{r}\,\mu p_1=(\lambda p_2)'+\lambda p_2^2-\frac{1}{r}\,\lambda p_2\equiv K; \tag{13}$$

$$K'+\left(\frac{3}{r}-p_\rho\right)K+\frac{1}{r}(\lambda+2\mu)p_1 p_2=0. \tag{14}$$

Система уравнений (11)—(13) неопределенная, и ее можно решить при дополнительных условиях относительно функций $\varphi_i(r)$; $\psi_i(r)$ и свойств среды λ, μ, ρ.

I. Предположим, что

$$\psi_i=\rho\varphi_i, \quad \text{т. е.} \quad q_i=p_\rho+p_i, \quad i=1,\,2.$$

Тогда уравнения (11) превращаются в тождество. Параметры p_1, p_2, p_ρ, μ и λ определяют из системы уравнений (12)—(14). Для этой системы можно получить решение в виде:

$$p_1=\frac{A}{r},\quad p_2=\frac{B}{r},\quad p_\rho=\frac{C}{r},\quad \mu=Dr^\alpha, \quad \lambda=Er^\alpha, \tag{15}$$

где A, B, C, D, E, α — постоянные.

После подстановки (15) в (12)—(14) получим алгебраическую систему уравнений:

$$A+B+C=0; \quad AD+BE+2\alpha D=0.$$

$$BE(B+\alpha-2)=AD(A+\alpha-2);$$

$$B[E(B+\alpha-2)(\alpha+1-C)+(E+2D)A]=0,$$

которая при произвольных положительных D и E имеет решения:

а) $A=4$; $B=0$; $C=-4$; $\alpha=-2$,

б) $A=0$; $B=-4/(\gamma-2)$; $C=4/(\gamma-2)$; $\alpha=2\gamma/(\gamma-2)$.

В случае а) по формулам (7) имеем $\psi_1=\left(\dfrac{r}{r_0}\right)^4$, $\psi_2=1$, $\rho=\rho_0\left(\dfrac{r}{r_0}\right)^{-4}$, $\mu=\mu_0\left(\dfrac{r}{r_0}\right)^2$, $\lambda=\gamma\mu$, где r_0 — характерный радиус; ρ_0, λ_0, μ_0 — плотность и параметры Ламе при $r=r_0$.

Вектор перемещения определяется по (2) разложением $\vec{u}=-R^4\operatorname{grad}\Phi_1+\operatorname{rot}\operatorname{rot}(\Phi_2\vec{e}_r)+\operatorname{rot}(\Phi_3\vec{e}_r)$, а независимые скалярные уравнения движения (10) принимают вид:

$$L_1(\Phi_1^*) = \Delta\Phi_1^* + \frac{4}{R}\frac{\partial\Phi_1^*}{\partial R} + \frac{8}{\gamma R^2}\Phi_1^* - \frac{1}{\gamma R^2}\frac{\partial^2\Phi_1^*}{\partial\tau^2} = 0;$$

$$L_2(\Phi_2^*) = \Delta\Phi_2^* - \frac{6}{R}\frac{\partial\Phi_2^*}{\partial R} + \frac{8}{R^2}\Phi_2^* - \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\Phi_2^*}{\partial\tau^2} = 0;$$

$$L_3(\Phi_3^*) = \Delta\Phi_3^* - \frac{4}{R}\frac{\partial\Phi_3^*}{\partial R} + \frac{4}{R^2}\Phi_3^* - \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial\tau^2} = 0,$$

где $\Phi_i^* = \Phi_i/r_0^2$; $R = \dfrac{r}{r_0}$; $\tau = \sqrt{\mu_0/\rho_0}\,\dfrac{t}{r_0}$.

В случае б) имеем

$$\psi_1 = 1;\ \psi_2 = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\frac{4}{\gamma-2}},\quad \rho = \rho_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{4}{\gamma-2}};\quad \mu = \mu_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-2}};\quad \lambda = \gamma\mu.$$

При этом вектор перемещения (2) и независимые скалярные уравнения (10) получим в виде:

$$\vec{u} = \operatorname{grad}\Phi_1 + R^{-\frac{4}{\gamma-2}}\operatorname{rot}\operatorname{rot}(\Phi_2\vec{e}_r) + \operatorname{rot}(\Phi_3\vec{e}_r);$$

$$L_1(\Phi_1^*) \equiv \Delta\Phi_1^* + \frac{4}{\gamma-2}\frac{1}{R}\frac{\partial\Phi_1^*}{\partial R} - \frac{4}{\gamma-2}\frac{1}{R^2}\Phi_1^* - \frac{1}{\gamma R^2}\frac{\partial^2\Phi_1^*}{\partial\tau^2} = 0;$$

$$L_2(\Phi_2^*) \equiv \Delta\Phi_2^* - \frac{2\gamma}{\gamma-2}\frac{1}{R}\frac{\partial\Phi_2^*}{\partial R} - \frac{4\gamma}{\gamma-2}\frac{1}{R^2}\Phi_2^* - \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\Phi_2^*}{\partial\tau^2} = 0;$$

$$L_3(\Phi_3^*) = \Delta\Phi_3^* + \frac{4}{\gamma-2}\frac{1}{R}\frac{\partial\Phi_3^*}{\partial R} - \frac{\gamma}{\gamma-2}\frac{1}{R^2}\Phi_3^* - \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\Phi_3^*}{\partial\tau^2} = 0.$$

II. Известное разложение вектора перемещения для однородной изотропной упругой среды в сферических координатах [2] $\vec{u} = \operatorname{grad}\Psi_1 + \operatorname{rot}\operatorname{rot}(r\Psi_2\vec{e}_r) + \operatorname{rot}(r\Psi_3\vec{e}_r)$ является частным случаем разложения (2). В этом случае условия разделения (11)—(14) удовлетворяются, а уравнения движения (10) переходят к известным уравнениям при $\Phi_1 = \Psi_1$, $\Phi_i = r\Psi_i$; $i = 2, 3$.

Разделение векторного уравнения на скалярные независимые уравнения имеет место и при следующем разложении перемещения:

$$\vec{u} = \psi_1\operatorname{grad}(f_1\Phi_1) + \psi_2\operatorname{rot}\operatorname{rot}(f_2\Phi_2\vec{e}_r) + \operatorname{rot}(\Phi_3\vec{e}_r),$$

где ψ_i, f_i—произвольные функции от r. При разложении получим опять условия разделения (11)—(14), которые не зависят от функций f_1 и f_2. Функции f_1, f_2 и их производные участвуют только в независимых скалярных уравнениях для потенциалов Φ_1, Φ_2, Φ_3. Поэтому разложение в виде [3]

$$\vec{u} = \frac{1}{f_1}\operatorname{grad}(f_1\Phi_1) + \frac{1}{f_2}\operatorname{rot}\operatorname{rot}(f_2\Phi_2\vec{e}_r) + \operatorname{rot}(\Phi_3\vec{e}_r)$$

для разделения векторного уравнения слоисто-неоднородной упругой среды в сферических координатах является частным случаем разложения (2).

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Ս. Գ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

Որոշ շառավղային անհամասեռ իզոտրոպ առաձգական միջավայրերի շարժման անկախ սկալյար հավասարումներ

Աշխատանքում դիտարկվում է տեղափոխության վեկտորի վերլուծությունն ընդհանրացված պոտենցիալներով, որը թույլ է տալիս որոշ շառավղային անհամասեռ իզոտրոպ առաձգական միջավայրի շարժման վեկտորային հավասարումը տրոհել անկախ սկալյար երկրորդ կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարումների։ Ստացված են այն պայմանները, որոնց պետք է բավարարի անհամասեռ առաձգական միջավայրի բնութագրող պարամետրերը, որպեսզի վերը նշված տրոհումը տեղի ունենա։

Ցույց է տրված, որ անհամասեռ առաձգական միջավայրի համար, որի խտությունը և Լամեի գործակիցները կախված են շառավիղից, աստիճանային օրենքով տրոհումը տեղի ունի և ստացված են շարժման անկախ սկալյար հավասարումները։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *F. C. Karal, J. B. Keller*, The Journal of the Acoustical Society of America, v. 31, p. 694—705 (1959). [2] *Ф. М. Морс, Г. Фешбах*, Методы теоретической физики. Т. 2. ИЛ, М., 1960. [3] *S. J. Singh, A. Ben-Menahem*, The Journal of the Acoustical Society of America, v. 46, p. 655—660 (1969).