УДК 539.3

МЕХАНИКА

С. О. Саркисян

Теорема взаимности в магнитоупругости тонких ортотропных оболочек*

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 3/IV 1987)

Сначала теорему взаимности получим для трехмерной теории магнитоупругости анизотропных оболочек и, используя асимптотический подход, выведем теорему взаимности для соответствующей двумерной теории.

Теорема взаимности в трехмерной теории магнитоупругости анизотропных тел получена в работе (1), при условии, что на границе рассматриваемого тела заранее известны компоненты возбужденного электромагнитного поля.

Ниже получена теорема взаимности в трехмерной теории магнитоупругости для ортотропных тел, при условии, что внутренняя задача электродинамики для движущейся оболочки через граничные условия связана с внешней задачей электродинамики для вакуума (окружающей оболочку среды).

1. Будем исходить из основных уравнений линейной теории трехмерной магнитоупругости (2), состоящих из трех групп уравнений. В первую группу входят трехмерные уравнения теории упругости с учетом массовых сил электромагнитного происхождения $F = \frac{1}{c}(j \times B_0)$;

во вторую группу входят трехмерные уравнения электродинамики для движущейся области, занимаемой оболочкой; в третью группу входят трехмерные уравнения электродинамики для среды, окружающей оболочку, которая считается вакуумом.

Плотность электрического тока j выражается следующим образом:

$$j = J_0 + \hat{\sigma} \left[E + \frac{1}{c} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \times B_0 \right) \right], \quad (1.1)$$

где $J_0 = (J_{01}, J_{02}, 0)$ — вектор плотности внешнего (стороннего) электрического тока,

$$\hat{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} \quad (1.2)$$

* Работа доложена на VI Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике. Ташкент, 1986.

тензор электрической проводимости материала оболочки, E —вектор напряженности возбужденного в оболочке электрического поля, v —вектор перемещения точек оболочки, B_0 —вектор напряженности заданного внешнего постоянного магнитного поля.

Пусть в ортотропной оболочке при неизменно заданном магнитном поле $B_0 = (B_{01}, B_{02}, B_{03})$ действуют две системы внешних воздействий (поверхностных сил и внешних токов), которые вызывают соответствующие магнитоупругие состояния (перемещения, напряженности возбужденного электромагнитного поля). Для первой системы причин и следствий применим все обозначения работы (3), а для второй системы причин и следствий применим те же самые обозначения, снабженные верхним индексом.

Применим к уравнениям магнитоупругости (для обеих систем причин и следствий) при однородных начальных условиях преобразование Лапласа по времени

$$f_*(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, p) = \int_0^{\infty} f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t) e^{-pt} dt. \quad (1.3)$$

Умножим все члены первого уравнения Максвелла

$$\text{rot } h_* = \frac{4\pi}{c} j_* \quad (1.4)$$

на вектор E'_* , а второе уравнение Максвелла

$$\text{rot } E_* = -\frac{1}{c} p h_* \quad (1.5)$$

на вектор h'_* , и произведем вычитание обеих частей первого равенства из соответствующих частей второго, аналогичным образом умножим все члены уравнений (1.4) и (1.5) с записанными для величин со штрихами соответственно на E_* и h_* и произведем вычитание из полученного первого равенства—второе.

После вычитания из полученного таким образом первого равенства второго полученный результат можно записать в виде следующего равенства:

$$\text{div}(E_* \times h'_*) - \text{div}(E'_* \times h_*) = \frac{4\pi}{c} \left[(J_{0_*} \cdot E'_* - J'_{0_*} \cdot E_*) + (j_{\text{пр}*} \cdot E'_* - j'_{\text{пр}} \cdot E_*) \right], \quad (1.6)$$

где $j_{\text{пр}}$ —вектор плотности тока проводимости (второе слагаемое в формуле (1.1)).

Совершенно аналогичным путем из соответствующих уравнений внешней задачи электродинамики получится равенство

$$\text{div}(E^{(e)*} \times h^{(e)'}) - \text{div}(E^{(e)'} \times h^{(e)*}) = 0. \quad (1.7)$$

Теперь произведем интегрирование всех членов (1.6) по объему V трехмерной оболочки, с применением теоремы Остроградского—Гаусса, аналогичным образом, интегрируем (1.7) по объему внешней

области, принимая во внимание граничные условия электродинамики (2), находим следующее равенство:

$$\int_{-h}^h dx_3 \int_{\Omega} \left\{ (J_{0*} \cdot E'_* - J_{0*} \cdot E_*) + \frac{\hat{\sigma}}{c} p |(\mathbf{v}_* \times \mathbf{B}_0) E'_* - (\mathbf{v}'_* \times \mathbf{B}_0) E_*| \right\} (1 + k_1 x_3)(1 + k_2 x_3) A_1 A_2 dx_1 dx_2 = 0. \quad (1.8)$$

Приступим теперь к рассмотрению векторного уравнения движения с учетом сил электромагнитного происхождения. Умножим это векторное уравнение скалярно на вектор $\rho \mathbf{v}'$ и интегрируем полученное равенство по объему трехмерной оболочки. Совершенно аналогичным путем скалярно умножим векторное уравнение движения, записанное на этот раз для величин со штрихами, на вектор $\rho \mathbf{v}_*$ и проведем интегрирование по объему оболочки. Таким образом, будем иметь два равенства. Вычтя из первого равенства второе и сложив полученное равенство с равенством (1.8), после некоторых преобразований и исключения общих членов из указанных уравнений приходим к равенству, выражающему теорему взаимности в трехмерной теории магнитоупругости в изображениях Лапласа:

$$\begin{aligned} & -p \int_{-h}^h dx_3 \int_{\Omega} (\sigma_{11*} e'_{11*} + \sigma_{22*} e'_{22*} + \sigma_{33*} e'_{33*} + \sigma_{12*} e'_{12*} + \\ & + \sigma_{13*} e'_{13*} + \sigma_{23*} e'_{23*}) (1 + k_1 x_3)(1 + k_1 x_3) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\ & + p \int_{-h}^h dx_3 \int_{\Omega} (\sigma'_{11} e_{11*} + \sigma'_{22} e_{22*} + \sigma'_{33} e_{33*} + \sigma'_{12} e_{12*} + \\ & + \sigma'_{13} e_{13*} + \sigma'_{23} e_{23*}) (1 + k_1 x_3)(1 + k_2 x_3) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 - \\ & - p \int_{-h}^h dx_3 \int_{\Gamma} [(\sigma_{21} v'_{1*} + \sigma_{22} v'_{2*} + \sigma_{23} v'_{3*}) (1 + k_1 x_3) A_1 d\alpha_1 - \\ & - (\sigma_{11} v'_{1*} + \sigma_{12} v'_{2*} + \sigma_{13} v'_{3*}) (1 + k_2 x_3) A_2 d\alpha_2] + \\ & + p \int_{-h}^h dx_3 \int_{\Gamma} [(\sigma'_{21*} v_{1*} + \sigma'_{22*} v_{2*} + \sigma'_{23*} v_{3*}) (1 + k_1 x_3) A_1 d\alpha_1 - \\ & - (\sigma'_{11*} v_{1*} + \sigma'_{12*} v_{2*} + \sigma'_{13*} v_{3*}) (1 + k_2 x_3) A_2 d\alpha_2] + \\ & + p \int_{\Omega} (\sigma^+_{13} v'_{1*} + \sigma^+_{23} v'_{2*} + \sigma^+_{33} v'_{3*}) (1 + k_1 h)(1 + k_2 h) A_1 A_2 d\sigma_1 d\sigma_2 - \\ & - p \int_{\Omega} (\sigma^-_{13} v'_{1*} + \sigma^-_{23} v'_{2*} + \sigma^-_{33} v'_{3*}) (1 - k_1 h)(1 - k_2 h) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 - \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned}
& -p \int_{\Omega} \int (\sigma'_{13} v'_{1z} + \sigma'_{23} v'_{2z} + \sigma'_{33} v'_{3z}) (1+k_1 h)(1+k_2 h) A_1 A_2 dx_1 dx_2 + \\
& + p \int_{\Omega} \int (\sigma^-_{13} v^-_{1z} + \sigma^-_{23} v^-_{2z} + \sigma^-_{33} v^-_{3z}) (1-k_1 h)(1-k_2 h) A_1 A_2 dx_1 dx_2 + \\
& + \frac{1}{c} p \int_{-h}^h dx_3 \int_{\Omega} |(J_c \times B_0) v' - (J_0 \times B_0) v_*| (1+k_1 z_3)(1+k_2 z_3) A_1 A_2 dx_1 dx_2 + \\
& + \frac{1}{c} p \int_{-h}^h dx_3 \int_{\Omega} |(E_* \times B_0) v' - (E \times B_0) v_*| (1+k_1 z_3)(1+k_2 z_3) A_1 A_2 dx_1 dx_2 = 0.
\end{aligned}$$

2. Вводим безразмерную систему координат и время, а также безразмерные величины по формулам работы (3). Вводим также несимметричные напряжения при помощи формул (4.5) и, ограничиваясь асимптотической погрешностью $O(\lambda^{-2l+2p})$, заменим безразмерные величины, входящие в (1.9), при помощи формул аналогичными формулами (2.3) из работы (6). Удерживая в равенстве (1.9) все члены до порядка $O(\lambda^{-2l+2p})$, после некоторых преобразований приходим к равенству

$$\begin{aligned}
& p \int_{\Omega} \int (X_{1*} u'_{1z} + X_{2*} u'_{2z} - Z_* w'_z - Y_{1*} \gamma'_{1z} - Y_{2*} \gamma'_{2z}) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 - \\
& - p \int_{\Omega} \int (X'_{1*} u_{1z} + X'_{2*} u_{2z} - Z'_* w_* - Y'_{1*} \gamma_{1z} - Y'_{2*} \gamma_{2z}) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
& + p \int_{\Gamma} (\tilde{T}_* \cdot u'_{\vartheta} + \tilde{S}_* \cdot u'_{t_z} + \tilde{Q}_* \cdot w'_z + \tilde{G}_* \cdot \gamma'_{\vartheta}) d\Gamma - \\
& - p \int_{\Gamma} (\tilde{T} \cdot u_{\vartheta} + \tilde{S}' \cdot u_{t_z} + \tilde{Q}_* \cdot w_* + \tilde{G}' \cdot \gamma_{\vartheta}) d\Gamma - \\
& - 2ph \cdot \frac{1}{c} \int_{\Omega} \int |J_0 (B_0 \times u') - J_{0*} (B_0 \times u_*)| A_1 A_2 dx_1 dx_2 + \\
& + \frac{4\pi h^3}{3c^3} p^2 \int_{\Omega} \int [\sigma_1 B_{03} (u_{1z} J'_{02} - u'_{1z} J_{02*}) - \sigma_2 B_{03} (u_{2z} J'_{01*} - u'_{2z} J_{01*}) - \\
& - \sigma_3 B_{02} (w_* J'_{01*} - w'_* J_{01*}) + \sigma_3 B_{01} (w_* J'_{02*} - w'_* J_{02*})] A_1 A_2 dx_1 dx_2 + \\
& + 2h \int_{\Omega} \int |(J_{01} E'_{10} - J'_{01} E_{10}) + (J_{02} E'_{20} - J'_{02} E_{20})| A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
& + \frac{4\pi h^3}{3c^3} p \int_{\Omega} \int [\sigma_1 (J_{01} E'_{10} - J'_{01} E_{10}) + \sigma_2 (J_{02} E'_{20} - J'_{02} E_{20})] A_1 A_2 dx_1 dx_2 = 0,
\end{aligned} \tag{2.1}$$

где u_1, u_2, w — компоненты перемещений точек срединной поверхности оболочки; $E_{(i)}$ — компоненты вектора возбужденного электрического поля в точках срединной поверхности оболочки; $\bar{T}, \bar{S}, \bar{Q}, \bar{G}$ — условия и моменты на граничном контуре срединной поверхности оболочки; u_n, u_t и γ_n, γ_t — соответственно нормальная и касательная компоненты вектора перемещения и вектора поворота в точках граничного контура срединной поверхности оболочки; X_i, Z, Y_i — внешние приведенные нагрузки.

Равенство (2.1) выражает содержание теоремы взаимности в двумерной теории магнитоупругости ортотропных тонких оболочек в изображениях Лапласа. В большинстве случаев при динамических задачах теорему взаимности применяют именно в таком виде, т. е. в изображениях Лапласа. В случае необходимости иметь теорему взаимности в оригинале необходимо применять обратное преобразование Лапласа.

Если внешние (сторонние) токи отсутствуют, то теорема взаимности (2.1) обращается к аналогичной теореме теории оболочек (4).

Ленинаканский филиал Ереванского
политехнического института им. К. Маркса

Ս. Հ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Բարակ օրթոտրոպ թաղանթների մագնիսաառաձգականության փոխադարձելիության թեորեմը

Ապացուցված է օրթոտրոպ առաձգական և օրթոտրոպ էլեկտրահաղորդիչ թաղանթի մագնիսաառաձգականության եռաչափ տեսության փոխադարձելիության թեորեման հաշվի առած թաղանթը շրջապատող միջավայրի (անօդ տարածություն) էլեկտրադինամիկական հավասարումները և թաղանթն այդ միջավայրից բաժանող մակերևույթի վրա էլեկտրադինամիկական ընդհանուր եղրաչին պայմանները:

Ասիմպտոտիկ մեթոդի կիրառման շնորհիվ մագնիսաառաձգականության եռաչափ տեսության փոխադարձելիության թեորեմից ստացվել է օրթոտրոպ առաձգական և օրթոտրոպ էլեկտրահաղորդիչ բարակ թաղանթների մագնիսաառաձգականության երկչափ տեսության փոխադարձելիության թեորեմը:

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ S. Kallski, W. Nowacki, Bull. de l'Acad. Pol. des scien. Série des scien. tech., v. 14 № 3, p. 169–174 (1966). ² С. А. Амбарцумян, Г. Е. Багдасарян, М. В. Белубекян, Магнитоупругость тонких оболочек и пластин, Наука, М., 1977. ³ С. О. Саркисян, в кн.: Материалы II Всесоюз. конф. „Прочность, жесткость и технологичность изделий из композиционных материалов“, т. 3, Ереван, Изд. Ереванского гос. ун-та, 1984. ⁴ А. Л. Гольденвейзер, Теория упругих тонких оболочек, Наука, М., 1976. ⁵ Л. А. Агаповян, Изв. АН СССР. Механика твердого тела, № 1, с. 109–120, 1972. ⁶ С. О. Саркисян, Уч. зап. Ереванского гос. ун-та. Ест. науки, № 2, с. 41–46, 1985.