ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXV 1987 3

УДК 517.1

МАТЕМАТИКА

В. С. Захарян

О нулях функций с ограниченным интегралом типа Дирихле

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 21/IV 1987)

1°. Рассмотрим класс D аналитических в единичном круге функций $f(z)$, имеющих конечный интеграл Дирихле

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} |f'(\rho e^{i\nu})|^2 \rho\, d\rho\, d\nu < +\infty.$$

Множество $\{z_\nu\}$ называется множеством единственности для класса D, если не существует функции $f \in D$ $(f \neq 0)$, для которой $f(z_\nu) = 0$.

А. Шапиро и А. Шильд в ([1]) совершенно новым методом уточнили прежний известный результат Л. Карлесона ([2]) и доказали, что если последовательность точек в единичном круге удовлетворяет условию

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{-\log(1-|z_\nu|)} < +\infty,$$

то существует функция $f \in D$ $(f \neq 0)$, которая становится нулем на этой последовательности.

В работе ([3]) построена последовательность $\{z_\nu\}$ в единичном круге, которая удовлетворяет условию $\sum_{\nu=1}^{\infty}(1-|z_\nu|) < +\infty$, и никакая функция $f \in D$ не может стать нулем на этой последовательности, если $f \neq 0$.

В работе ([4]) автора был введен класс $D_2\{\omega\}$, который содержит в себе класс D.

Пусть положительная, непрерывная и неубывающая на $[0, 1]$ функция ω удовлетворяет условиям $\omega(0) = 1$, $\int_0^1 \omega(r)\,dr < +\infty$.

Скажем, что аналитическая в единичном круге функция $f(z)$ принадлежит классу $D_2\{\omega\}$, если $\int_0^1 \int_0^{2\pi} h(\rho) |f'(\rho e^{i\nu})|^2 \rho\, d\rho\, d\nu < +\infty$, где

$$h(x) = \int_x^1 \omega(t)\,dt, \quad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

В работе [4] были доказаны следующие теоремы.

Теорема А. *Произведение Бляшке*

$$B(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{z-z_k}{1-z\cdot\bar{z}_k}\,\frac{|z_k|}{z_k},$$

при условии $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_{|z_k|}^{1}\omega(x)dx<+\infty$ *принадлежит классу* $D_2\{\omega\}$.

Теорема В. *Если* $\varphi(t)$ *некоторая непрерывная функция, для которой* $\varphi(0)=0$, $\varphi(t)>0$ $(t>0)$, *то существует множество единственности* $\{z_\nu\}$ *для класса* $D_2\{\omega\}$, *удовлетворяющее условию*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\int\limits_{|z_\nu|}^{1}\omega(x)dx\cdot\varphi(1-|z_\nu|)<\infty.$$

2°. Если $\{z_\nu\}$ $(0<|z_\nu|<1)$ некоторая последовательность точек в единичном круге, то условие $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(1-|z_\nu|)<\infty$ необходимо и достаточно, чтобы существовала аналитическая и ограниченная функция в единичном круге, удовлетворяющем условиям $f(z_\nu)=0$ и $f(0)=1$.

Для классов D и $D_2\{\omega\}$ ситуация меняется, необходимое и достаточное условие на $\{z_\nu\}$ не существует. Для класса D это доказано в работе [5], а для класса $D_2\{\omega\}$ это показывает утверждение, доказанное в конце этой заметки.

Сперва докажем следующую лемму.

Лемма. *Для любой последовательности* $r_k(0<r_k<1)$ *есть целые* n_k *такие, что*

$$\frac{2}{k}>\frac{1}{n_k\cdot h(r_k)}\geqslant\frac{1}{k}.$$

Доказательство. Пусть N_k множество тех целых n, которые удовлетворяют условию $\dfrac{1}{h(r_k)}\geqslant\dfrac{n}{k}$.

Так как $\dfrac{1}{h(r_k)}>1$, то множество N_k не пустое и ограничено. Пусть $n_n=\max N_k$, тогда

$$\frac{1}{n_k\cdot h(r_k)}\geqslant\frac{1}{k}>\frac{1}{(n_k+1)\cdot h(r_k)}\geqslant\frac{1}{2\cdot n_k\cdot h(r_k)}.$$

Следствие. *Если* $\varphi(t)$ *непрерывная функция* $\varphi(0)=0$ *и* $\varphi(t)>0$, *то существует* r_n, $0<r_n<1$, *таких, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty}h(r_n)=\infty,\ \text{но}\ \sum_{n=1}^{\infty}h(r_n)\cdot\varphi(1-r_n)<\infty.$$

Действительно, для любого k выберем s_k, $0<s_k<1$, так чтобы $\varphi(1-s_k)<\dfrac{1}{k^3}$, а n_k выберем, как в лемме. Тогда

$$2\cdot h(r_k)>\frac{k}{n_k},\ h(r_k)<\frac{k}{n_k},\ h(r_k)\cdot\varphi(1-r_k)<\frac{1}{n_k\cdot k^2}.$$

Теорема. *Существует функция $f(\neq 0)\in D_2\{\omega\}$, нули которой удовлетворяют условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{|z_k|}^{1}\omega(x)dx=+\infty.$$

Доказательство. Пусть $\varphi(t)=\dfrac{1-t}{h(t)}$, тогда из следствия леммы получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)<\infty \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty}h(|z_k|)=\infty.$$

Предположим теперь, что $\arg z_k=0$, $k=1, 2, \ldots$ и составим произведение

$$\Psi(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{r_k-z}{1-z\cdot r_k}.$$

Получим $$|\Psi'(z)|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-r_k^2}{|1-z\cdot r_k|^2}=0\left(\frac{1}{|z-1|^2}\right).$$

Отсюда ясно, что функция $f(z)=(z-1)^2\cdot\Psi(z)$ имеет ограниченную производную и, следовательно, удовлетворяет условиям теоремы.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Վ. Ս. ԶԱՔԱՐՅԱՆ

Դիրիխլեի տիպի սահմանափակ ինտեգրալ ունեցող ֆունկցիաների զերոների մասին

Թող (0,1] միջակայքում անընդհատ, ոչ բացասական և չնվազող ֆունկցիան բավարարում է հետևյալ պայմաններին

$$\omega(0)=1, \qquad \int_0^1\omega(r)dr<+\infty.$$

Այս ֆունկցիայի միջոցով, նախկինում, հեղինակի կողմից սահմանված էր Դիրիխլեի տիպի սահմանափակ ինտեգրալ ունեցող $D_2\{\omega\}$ ֆունկցիաների դաս։

Հոդվածում մեջ ապացուցվում է, որ գոյություն ունի $f(\neq 0)\in D_2\{\omega\}$ ֆունկցիա, որի z_k զերոները բավարարում են

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{|z_k|}^{1}\omega(x)dx=+\infty$$

պայմանին։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *H. Shapiro, A. Shilds*, Canad. J. Math., v. 21, p. 312—316 (1969). [2] *L. Carleson*, Math. Z., v. 56, p. 280—295 (1952). [3] *A. Caughran*, Canad. Math., v. 21, p. 312—316 (1969). [4] *В. С. Захарян*, ДАН АрмССР, т. 50, № 6 (1970). [5] *O. Lokki*, Ann. Acad. Sci. Fennicae, v. 39, p. 1—57 (1947).