ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXV 1987 3

УДК 517.53+517.916

МАТЕМАТИКА

С. Ц. Саркисян

О порядке роста мероморфных функций и асимптотические свойства мероморфных решений алгебраических дифференциальных уравнений

(Представлено чл-корр. АН Армянской ССР Н. У. Аракеляном 11/III 1987)

В настоящей работе введено новое понятие S-порядка мероморфных функций, обобщающее понятие порядка роста целых функций, и получены оценки S-порядка мероморфных решений дифференциальных уравнений.

1. Пусть $w=w(z)$ трансцендентная мероморфная во всей плоскости функция. Введем следующие обозначения. Пусть $p_j (j=1, 2, \ldots)$ нули и полюсы функции w и пусть E_w множество кругов $|z-p_j| < \varepsilon_j$, $(j=1, 2, \ldots)$ с конечной суммой длин радиусов. Множество E_w назовем исключительным множеством функции w, и пусть $E^k_w = \bigcup\limits_{i=1}^{k} Ez^i w^{(i)}/w$.

Обозначим через

$$S(z, w) = \frac{zw'(z)}{w(z)} \tag{1}$$

и назовем S-характеристической функцией w.

Определение. *Пусть $w(z)$ мероморфная во всей плоскости функция и G—некоторое неограниченное множество точек. S-порядком w по множеству G, или $S(G)$-порядком w, назовем*

$$\rho_S(G) = \overline{\lim_{z\to\infty}} \frac{\ln|S(z, w)|}{\ln|z|}, \quad z\in G\setminus E_w, \tag{2}$$

а S-порядком функции w назовем

$$\rho_S = \sup_{G\subset C}\{\rho_S(G)\}.$$

В частности, если $w(z)$ целая функция, то легко видеть, что $\rho_S(G)=\rho$, где $G=\{\xi\in S \mid |w(\xi)| = \max\limits_{|z|=|\xi|}|w(z)|\}$, а ρ—обычный порядок w.

Обозначим через

$$H^k(z, w) = \left(\frac{z}{S(z, w)}\right)^k \cdot \frac{w^{(k)}(z)}{w(z)}, \quad z\notin E_{H^k} \tag{3}$$

и назовем H^k-характеристической функцей w, где $E_{H^k} = E^1_w \cup \cup Ez^k w^{(k)}/w$—исключительное множество функции H^k.

II. Рассмотрим неприводимое алгебраическое дифференциальное уравнение

$$F\left(z,\ w,\ \frac{dw}{dz},\ \ldots,\ \frac{d^m w}{dz^n}\right)=0, \tag{4}$$

где F—многочлен от своих переменных.

Определение. *Пусть $w=w(z)$ мероморфная (трансцендентная) функция и G—некоторое неограниченное множество точек. Будем говорить, что $w(z)$ принадлежит классу $V_{n,p}(G)$, если при любом натуральном $j \leqslant n$*

$$\ln_p|H^j(z,\ w)|=O(|z|^{\alpha_j}),\ z \in G \setminus E_{Hj}, \tag{5}$$

где $\alpha_j \geqslant 0$, $(j=1, 2, \ldots, n)$ *и хотя бы один* $\alpha_j > 0$, $\ln_p a=\underbrace{\ln \ldots \ln}_{p} a$, $\ln_0 a=a$—*исключительно множество* H^j*.

Известно, что S-порядок всякого мероморфного решения уравнения (4) из класса $V_{n,0}(G)$ конечное число (¹).

Посмотрим, имеет ли уравнение (4) мероморфные решения из класса $V_{n,1}(G)$ конечного S-порядка. Этому вопросу и посвящена эта работа.

Пусть уравнение (4) имеет мероморфное решение из $V_{n,1}(G)$. Так как нас интересует асимптотическое поведение решения уравнения (4), в (4), заменяя

$$w^{(j)}(z)=k_j|z|^{\gamma_j} \cdot \exp(\beta_j|z|^{\alpha_j})\left(\frac{S(z,\ w)}{z}\right)^j w(z)(1+\varepsilon_j(z)),\ z \in G \setminus E_{Hj}, \tag{6}$$

где $0<A \leqslant |k_j| \leqslant B<\infty$, $j=1, 2, \ldots, n$, α_j, β_j, γ_j—неотрицательные действительные числа, а $\varepsilon_j(z) \to 0$ при $z \to \infty$, получим

$$\begin{gathered}O_F(z,\ S,\ w) \equiv F(z,\ w,\ k_1|z|^{\gamma_1}\exp(\beta_1 \cdot |z|^{\alpha_1})z^{-1}Sw,\ \ldots,\\ k_n|z|^{\gamma_n}\exp(\beta_n|z|^{\alpha_n}) \cdot z^{-n}S^n w)=0,\ z \in G \setminus E_F,\end{gathered} \tag{7}$$

где $E_F=\bigcup\limits_{j=1}^{n} E_{Hj}$—некоторое множество кругов с конечной суммой длин радиусов, которое назовем исключительным множеством уравнения (4).

Уравнение (7) назовем определяющим уравнением, а $O_F(z,\ S,\ w)$—определяющим многочленом уравнения (4) на множестве G в классе $V_{n,1}(G)$.

Ясно, что $O_F(z\ S,\ w)$ многочлен относительно S и он неприводим. В зависимости от поведения мероморфных решений уравнения (4) из класса $V_{n,1}(G)$ имеется несколько случаев.

1. Пусть w мероморфное решение уравнения (4) из класса $V_{n,1}(G)$ и для него

$$\lim_{z \to \infty} w(z)=\infty,\ z \in G_w \subset G. \tag{8}$$

Скажем, что мероморфное решение уравнения (7) из класса

---

* Ясно, что $V_{n,0} \subset V_{n,1} \subset \ldots \subset V_{n,p}$

$V_{n,1}(G)$ принадлежит классу $V_{n,1}^{\infty}(G)$, если для этого решения имеет место (8).

Сперва уравнение (4) запишем в виде

$$F(z, w, w_z, \ldots, w_{z^n}) \equiv \sum_{j_0, \ldots, j_n} a_{j_0, \ldots, j_n}(z) \cdot w^{j_0} \cdot w_z^{j_1} \ldots w_{z^n}^{j_n} = 0. \tag{9}$$

В предположении, что уравнение (9) имеет решение из класса $V_{n,1}(G)$ из (9), имея в виду (6), получаем

$$O_F(z, S, w) = \sum_{j_0, \ldots, j_n} a_{j_0, \ldots, j_n}(z) \cdot k_1^{j_1} \ldots k_n^{j_n} \cdot |z|^{\gamma_1 j_1 + \ldots + \gamma_n j_n} \cdot \exp\{\beta_1 j_1 |z|^{\alpha_1} +$$

$$+ \ldots + \beta_n j_n |z|^{\alpha_n}) \cdot \left(\frac{S}{z}\right)^{j_0 + \ldots + n j_n} \cdot w^{j_0 + \ldots + j_n} = 0, \; z \in G | E_F. \tag{10}$$

Пусть $O_F(z, S, w)$—многочлен степени m относительно w. После деления левой и правой части (10) на w^m при $z \to \infty$ получим

$$X_F(z, S) = \sum_{j=0}^{q} a_{m_j}(k_1, \ldots, k_n) \cdot z^{m_j} \cdot |z|^{\gamma_j} \exp(\beta_j |z|^{\alpha_j}) S^j = 0, \; z \in G_w | E_F, \tag{11}$$

где q—степень коэффициента при w^m относительно S, a_{m_j}—ограниченные функции от своих переменных, m_j—целые числа, α_j, β_j, γ_j—неотрицательные числа.

Уравнение (11) назовем характеристическим уравнением, а многочлен $X_F^{\infty}(z, S)$—характеристическим многочленом уравнения (4) на множество G в классе $V_{n,1}(G)$. В дальнейшем предположим, что многочлен $X_F(z, S)$ неприводим.

Левую и правую части (11) делим на коэффициент при s^q и при $z \to \infty$ получим

$$S^q + \sum_{j=0}^{q-1} \bar{a}_{m_j}(k_1, \ldots, k_n) \cdot z^{\bar{m}_j} \cdot |z|^{\bar{\gamma}_j} \exp(\beta_j |z|^{\bar{\alpha}_j}) \cdot S^j = 0, \; z \in G | E_F, \tag{12}$$

где $\bar{a}_{m_j} = a_{m_j} | a_{m_q}$, $\bar{m}_j = m_j - m_q$, $\gamma_j = \gamma_j - \gamma_q$, $\alpha_j = \max(\alpha_j, \alpha_q)$, а $\bar{\beta}_j$ просто выражается через β_j и β_q.

При получении (12) предполагали, что в (11) $a_{m_q} \neq 0$. Если в (11) $a_{m_q} = 0$, то рассуждения, которые проведем ниже, будут несправедливы. Предположим еще, что в (12) одна пара $\bar{\alpha}_j$, $\bar{\beta}_j$ строго положительные числа.

Предполагая, что уравнение (12) имеет решение вида $|S| \sim c \cdot |z|^{\rho}$, получаем

$$m\left(\sum_{j=0}^{q-1} \bar{a}_{m_j} \cdot z^{\bar{m}_j} \cdot |z|^{\bar{\gamma}_j} \cdot \exp(\bar{\beta}_j \cdot |z|^{\bar{\alpha}_j}) \cdot S^j\right) = O(\ln r)^*, \tag{13}$$

имея в виду, что

$$m\left(\sum_{j=0}^{q-1} \bar{a}_{m_j} \cdot z^{\bar{m}_j} \cdot |z|^{\bar{\gamma}_j} \cdot \exp(\bar{\beta}_j \cdot |z|^{\bar{\alpha}_j}) \cdot S^j\right) = m(S^q)$$

---

* $m(r, w) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \ln^+ |w(re^{i\varphi})| d\varphi.$

и $m(S)=O(\ln r)$. Соотношение (13) противоречие с условием того, что в (12) одна пара $\bar{\alpha}_j$, $\bar{\beta}_j$ положительные числа.

Если характеристический многочлен превращается в одночлен, то он принимает вид

$$X_F^{\infty}(z, S) \equiv A_{m_q}(k_1, \ldots, k_n, z) \cdot S^q, \ z \in G_w \setminus E_F.$$

Так как в силу условия $a_{m_q} \neq 0$, получаем $S=0$. Это противоречие и доказывает отсутствие решения уравнения (12) указанного вида. Если $q=0$, то характеристическое уравнение принимает вид

$$X_F^{\infty}(z, S) \equiv A_{m_q}(k_1, \ldots, k_n, z) = 0.$$

В силу того, что $a_{m_q} \neq 0$, следует $A_{m_q} \neq 0$. Опять получим противоречие.

Из вышесказанного следует

Теорема 1. *Пусть задано алгебраическое дифференциальное уравнение* (4), *где* F — *многочлен от своих переменных и* G — *некоторое неограниченное множество. Пусть характеристический многочлен* (12) X_F^{∞} *уравнения* (4) *неприводим, в* (12) $a_{m_q} \neq 0$ *и одна пара* $\bar{\alpha}_j$, $\bar{\beta}_j$ *строго положительные числа, тогда уравнение* (4) *мероморфных решений конечного S-порядка из класса* $V_{n,1}^{\infty}(G)$ *не имеет.*

Замечание. Если характеристический многочлен приводим, либо в (11) $Q_{m_q}=0$, либо в (12) $\bar{\alpha}_j$, $\bar{\beta}_j=0$ $(j=0, \ldots, q-1)$, то уравнение (4) может иметь мероморфные решения конечного S-порядка.

2. Пусть w мероморфное решение уравнения (4) из класса $V_{n,1}(G)$ и для него

$$\lim_{z \to \infty} w(z) = 0, \quad z \in G_w \subset G. \tag{14}$$

Скажем, что мероморфное решение уравнения (4) из класса $V_{n,1}(G)$ принадлежит классу $V_{n,1}^{0}(G)$, если для этого решения имеет место (14).

В уравнении (4) заменим $w=1/\omega$. При такой замене алгебраическое дифференциальное уравнение переходит в алгебраическое дифференциальное уравнение. Имея в виду, что $S(z, w) = -S(z, \omega)$, заключаем, что S-порядок мероморфного решения уравнения (4) при такой замене тоже не меняется. И наконец, если $H^j(z, w)$ при $z \in G_w \setminus E_F$ удовлетворяет условию (5), то и $H^j(z, \omega)$ при $z \in G_w \setminus E_F$ тоже удовлетворяет этому условию.

Пусть после замены $w=1/\omega$ уравнение (4) переходит в уравнение

$$\Phi(z, \omega, \omega', \ldots, \omega^{(n)}) = 0, \tag{15}$$

где Ф многочлен от своих переменных. Уравнение (15) назовем инверсионным уравнением (4). При $\omega \in V_{n,1}^{\infty}(G)$ имеем $w \in V_{n,1}^{0}(G)$, откуда следует

Теорема 2. *Пусть задано алгебраическое дифференциальное уравнение* (4), *где* F — *многочлен от своих переменных и* G — *некоторое неограниченное множество. Пусть характеристический* *многочлен X_{Φ}^{∞} уравнения (15) неприводим, в характеристическом многочлене коэффициент при старшем члене относительно S не равен нулю и хотя бы один коэффициент в X_{Φ}^{∞} имеет конечный порядок, тогда уравнение (4) мероморфных решений конечного S-порядка из класса $V_{n,1}^{0}(G)$ не имеет.*

3. Пусть w мероморфное решение уравнения (1) из класса $V_{n,1}(G)$ и пусть

$$\lim_{z\to\infty} w(z)=c,\ 0<|c|<\infty,\ z\in G_w\subset G. \tag{16}$$

Скажем, что мероморфное решение уравнения (4) из класса $V_{n,1}(G)$ принадлежит классу $V_{n,1}^{c}(G)$, если для этого решения имеет место (16).

Пусть определяющий многочлен $O_F(z, S, w)$ многочлен степени q относительно $S(z, w)$. При $z\to\infty$ и $z\in G_w\setminus E_F$ из (10) получим асимптотическое уравнение

$$X_F^c(z, S)\equiv\sum_{j=0}^{q} a_{m_j}(c, k_1, \ldots, k_n)\cdot z^{m_j}\cdot|z|^{\gamma_j}\cdot\exp(\beta_j\cdot|z|^{\alpha_j})\cdot S^j= =0,\ z\in G|E_F, \tag{17}$$

где a_{m_j}—ограниченные функции от своих переменных, m_j—целые числа, α_j, β_j, γ_j—неотрицательные числа. Уравнение (17) назовем характеристическим уравнением, а многочлен $X_F^c(z, S)$ характеристическим многочленом уравнения (4) на множестве G в классе $V_{n,1}(G)$.

Теорема 3. *Пусть задано алгебраическое дифференциальное уравнение (4), где F—многочлен от своих переменных и G—некоторое неограниченное множество. Пусть характеристический многочлен (17) уравнения (4) неприводим, в (11) $a_{m_q}\neq 0$ и одна пара $\bar{\alpha}_j=\alpha_j-\alpha_q$ и $\bar{\beta}_j=\beta_j-\beta_q$—строго положительные числа, тогда уравнение (4) мероморфных решений конечного S-порядка из класса $V_{n,1}(G)$ не имеет.*

Для доказательства этой теоремы нужно повторить рассуждения теоремы (1), имея в виду, что характеристический многочлен X_F^c имеет такой же вид, как характеристический многочлен X_F^{∞}, из свойств которого и следовала теорема 1.

Аналогичные теоремы верны для классов $V_{n,p}(G)$, $p\geqslant 1$.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Ս. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Մերոմորֆ ֆունկցիաների կարգի մասին և հանրահաշվական դիֆերենցիալ հավասարումների մերոմորֆ լուծումների ասիմպտոտիկ հատկությունները

Սույն աշխատանքում մտցված է մերոմորֆ ֆունկցիաների S—կարգի նոր հասկացությունը, որը հանդիսանում է ամբողջ ֆունկցիաների կարգի ընդհանրացումը, և ստացված են հանրահաշվական դիֆերենցիալ հավասարումների մերոմորֆ լուծումների S—կարգի գնահատականները։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. Ц. Саркисян*, Дифференциальные уравнения, т. 23, № 6 (1987). [2] *В. В. Голубев*, Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, Наука М.—Л., 1950.