ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXXV 1987 3

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

М. В. Самохин

О граничном поведении аналитических функций в областях произвольной связности

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 11/II 1987)

Пусть D—произвольная область расширенной плоскости с компактной в конечной плоскости границей; $H^\infty(D)\neq\{\text{const}\}$; $\pi:\Delta\to D$—универсальное накрывающее отображение единичного круга Δ на D; G—группа всех дробно-линейных отображений Δ на себя, таких, что $\pi\circ\gamma=\pi$ для всех $\gamma\in G$; $L^p(d\theta, G)$, $H^p(\Delta, G)$ и $S(\Delta, G)$ соответственно, подпространства в $L^p(d\theta)$, $H^p(\Delta)$ и $S(\Delta)$ (класс функций Смирнова), состоящие из функций, автоморфных относительно G; M, M_{L^∞} и Ш соответственно пространства максимальных идеалов алгебр $H^\infty(\Delta, G)$ (или, что то же, $H^\infty(D)$) и $L^\infty(d\theta, G)$ и граница Шилова алгебры $H^\infty(\Delta, G)$ $(H^\infty(D))$.

В работах [1,2] была рассмотрена задача о существовании автоморфных аналитических функций с заданным модулем граничных значений и описан класс областей (в работе [2] они называются областями типа (*)), где эта задача решается положительно. Было по казано, что любое из следующих утверждений полностью описывает этот класс:

1) для любой вещественной функции $u\in L^\infty(d\theta, G)$, $u\geqslant\rho>0$, найдется функция $H\in H^\infty(\Delta, G)$, такая, что $|H(e^{i\theta})|=u(\theta)$ почти всюду на единичной окружности;

2) алгебра $H^\infty(\Delta, G)$, естественно вложенная в $L^\infty(d\theta, G)$, разделяет точки пространства M_{L^∞} и $Ш=M_{L^\infty}$;

3) для любой ограниченной мультипликативной в области D функции f, такой, что $\sup\limits_D|fh|=\sup\limits_D|h|$ для всех $h\in H^\infty(D)$, справедливо также $\sup\limits_D|fl|=\sup\limits_D|l|$ для любой ограниченной мультипликативной в области D функции l (напомним, что многозначная аналитическая в области D функция называется мультипликативной, если ее модуль однозначен);

4) в условиях п. 3 суперпозиция $f\circ\pi\in H^\infty(\Delta)$ будет внутренней функцией;

5) для любой вещественной измеримой на единичной окружности функции u, такой, что $u\geqslant\rho>0$ и $\ln u\in L^1(d\theta, G)$, существует функция $H\in S(\Delta, G)$, такая, что $|H(e^{i\theta})|=u(\theta)$ почти всюду на единичной окружности.

В дальнейшем области D, для которых справедливы утверждения 1)—5), мы будем называть гармоничными (в силу результатов, излагаемых ниже, это название предпочтительнее названия „типа $(*)$“). И хотя любое из этих утверждений дает критерий гармоничности, ни одно из них не дает ясного представления о природе гармоничности области D. Дальнейшее изучение этого класса областей и привлечение понятия гармонической меры позволили получить более полное и ясное представление об этом классе.

Для формулировки результатов нам потребуются следующие обозначения: $h^\infty(D)$—пространство ограниченных гармонических в области D функций; L—минимальная компактификация области D, в которой все функции из $h^\infty(D)$ непрерывны, и Ch—граница Шоке для $h^\infty(D)$; P_z—ядро Пуассона для точки $z\in\Delta$ и m_z—мера на пространстве максимальных идеалов алгебры $L^\infty(d\theta)$ (или, что то же, на границе Шилова алгебры $H^\infty(\Delta)$), полученная каноническим поднятием меры $P_z d\theta$; если $w=\pi(z)$, то λ_w и $\tilde{\lambda}_w$—проекции меры m_z на L и M соответственно, индуцированные накрытием $\pi:\Delta\to D$; $\lambda=\lambda_{\pi(0)}$ и $\tilde{\lambda}=\tilde{\lambda}_{\pi(0)}$ (на самом деле выбор точки не существен, так как все меры λ_w $(\tilde{\lambda}_w)$ взаимно абсолютно непрерывны для различных w, а нас интересует не конкретная мера, а класс мер взаимно абсолютно непрерывных относительно любой из $\lambda_w(\tilde{\lambda}_w)$); $C(E)$—пространство непрерывных на E функций, снабженное sup-нормой.

Теорема 1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *область D гармонична;*

2) *пространства* $C(\text{Ш})$, $h^\infty(D)$, $C(\operatorname{supp}\lambda)$, $L^\infty(d\lambda)$, $L^\infty(d\theta, G)$ *изометрически изоморфны друг другу;*

3) *пространства* Ш, Ch, M_{L^∞}, $M_{L^\infty(d\lambda)}$, *естественно, гомеоморфны друг другу, при этом* $\text{Ш}=\operatorname{supp}\tilde{\lambda}$ *и* $\tilde{\lambda}$ *является единственной с точностью до взаимной абсолютной непрерывности, нормальной мерой на* Ш, *замкнутый носитель которой совпадает с* Ш.

Заметим, что перечень пространств в утверждениях 2) и 3) в приведенной теореме может быть пополнен за счет использования компактификаций Винера, Мартина и некоторых других.

Основную идейную нагрузку в теореме 1 несет равенство Ш и Ch, означающее „одинаковость“ принципов максимума модуля для пространств ограниченных аналитических и ограниченных гармонических в области D функций. Следующее утверждение дает расшифровку этой „одинаковости“ внутри области D без использования понятий компактификации и минимальной границы.

Для каждой точки $\zeta\in\partial D$ фиксируем некоторое множество $E_\zeta\subset D$, такое, что $\zeta\in\bar{E}_\zeta$, и пусть $F\subset\partial D$. Будем говорить, что множество $E_F=\{E_\zeta\}_{\zeta\in\partial D\setminus F}$ удовлетворяет обобщенному принципу максимума для $H^\infty(D)$ (соответственно, для $h^\infty(D)$), если

$$\sup_D|h|=\sup_{\zeta\in\partial D\setminus F}\left\{\overline{\lim_{\substack{z\to\zeta\\ z\in E_\zeta}}}|h|\right\}$$

для всех $h\in H^\infty(D)$ (соответственно, для всех $h\in h^\infty(D)$).

Теорема 2. *Область D гармонична тогда и только тогда,* *когда любое множество E_ζ, удовлетворяющее обобщенному принципу максимума для $H^\infty(D)$, удовлетворяет также обобщенному принципу максимума $h^\infty(D)$.*

В работе ([2]) было показано, что гармоничность области является локальным свойством ее границы, и получено достаточное условие гармоничности, имеющее локальный характер. Теорема 1 позволяет усилить этот результат:

Теорема 3. *Если у каждой точки $\zeta\in\partial D$, за исключением, быть может, точек из некоторого множества $Q\subset\partial D$ гармонической меры нуль, существует окрестность U_ζ, такая, что гармоничной является каждая компонента пересечения $U_\zeta\cap D$, то и сама область D является гармоничной.*

Теоремы 1, 2 и 3 позволяют существенно расширить класс примеров, как гармоничных, так и негармоничных областей. В частности, удается показать, что условие $u\geqslant\rho>0$ (см. утверждения 1)—5) в начале работы) не может быть, вообще говоря, заменено на $u\geqslant 0$, как это имеет место в случае единичного круга и конечно-связной области.

Рассмотрим теперь некоторые свойства предельных множеств в произвольных областях с точки зрения равномерных алгебр. Аналогичная задача в единичном круге была рассмотрена в работе ([3]).

Отображение Φ из $H^\infty(D)\times\partial D$ в подмножества комплексной плоскости называется предельным оператором, если для любых $f\in H^\infty(D)$ и $\zeta\in\partial D$ множество $\Phi(f,\zeta)$ является подмножеством предельного множества $Cl(f,\zeta)$ функции f в точке ζ. Предельный оператор называется равномерным, если для любой точки $\zeta\in\partial D$ найдется множество Φ_ζ в слое пространства максимальных идеалов алгебры $H^\infty(D)$, лежащем над точкой ζ, такое, что $\Phi(f,\zeta)=\hat{f}(\Phi_\zeta)$, где $\hat{f}$—преобразование Гельфанда функции f. Пусть M_ζ—указанный слой и $Ш_\zeta=Ш\cap M_\zeta$.

Теорема 4. *Пусть Φ—равномерный предельный оператор. Для того, чтобы в точке $\zeta\in\partial D$ утверждения*

а) *множество $Cl(f,\zeta)\setminus\Phi(f,\zeta)$ открыто;*

б) *множество $Cl(f,\zeta)\setminus\{\Phi(f,\zeta)\cup R(f,\zeta)\}$ имеет аналитическую (для гармоничных областей—логарифмическую) емкость нуль ($R(f,\zeta)$—множество повторяющихся значений функции f) были выполнены для всех $f\in H^\infty(D)$, необходимо и достаточно, чтобы $Ш_\zeta\subset\Phi_\zeta$.*

Наиболее общими конструкциями классической теории предельных множеств, которые естественно приводят к понятию равномерного предельного оператора, являются следующие: для каждой точки $\zeta\in\partial D$, так же, как при определении обобщенного принципа максимума, фиксируем некоторое множество $E_\zeta\subset D$, такое, что $\overline{E}_\zeta\ni\zeta$ (в качестве E_ζ можно, например, взять всю область D, кривую, последовательность точек и т. д.). Положим по определению $K(f,\zeta,E)=$
$=\bigcap_{r>0}\overline{f(\Delta(\zeta,r)\cap E_\zeta)}$ и назовем это множество предельным множеством функции f в точке ζ вдоль $E=\{E_\zeta\}$. Для заданного подмножества

$N \subset \partial D$ граничным предельным множеством функции f в точке ζ вдоль E по модулю N назовем множество

$$K_N(f, \zeta, E) = \bigcap_{r>0} \Big[\overline{\bigcup_{\xi \in \Delta(\zeta, r) \cap (\partial D / N \zeta /)} K(f, \xi, E)} \Big].$$

Теорема 5. *$K(f, \zeta, E)$ и $K_N(f, \zeta, E)$ являются равномерными предельными операторами.*

Приведем несколько следствий из теорем 4 и 5.

Следствие 1. *Утверждения* а) *и* б) *теоремы 4 справедливы для оператора $K(f, \zeta, E)$ в точке $\zeta \in \partial D$ тогда и только тогда, когда для любой функции $h \in H^\infty(D)$ справедливо равенство*

$$\overline{\lim_{z \to \zeta}} |h| = \overline{\lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in E_\zeta}}} |h|.$$

Следствие 2. *Утверждения* а) *и* б) *теоремы 4 справедливы для оператора $K_N(f, \zeta, E)$ для всех $\zeta \in \partial D$ тогда и только тогда, когда множество E_N удовлетворяет обобщенному принципу максимума для $H^\infty(D)$.*

Следствие 3. *Утверждения* а) и б) *теоремы 4 справедливы для оператора $K_N(f, \zeta, E)$ в точке ζ тогда и только тогда, когда*

$$\overline{\lim_{z \to \zeta}} (h) = \overline{\lim_{\substack{\xi \to \zeta \\ \xi \in \partial D / N / \zeta}}} \Big(\overline{\lim_{\substack{z \to \xi \\ z \in E_\xi}}} |h| \Big)$$

для любой функции $h \in H^\infty(D)$.

Заметим, что из теоремы 4 и следствий 1—3 вытекает, что справедливость некоторых теорем классической теории предельных множеств, таких, например, как теорема Ловатера и теорема Иверсена—Цудзи, эквивалентна выполнению в области D соответствующего обобщенного принципа максимума. Таким образом, сами эти теоремы являются немедленным следствием теоремы 4, следствий 1—3 и классических принципов максимума модуля (для теоремы Ловатера это обобщенный принцип максимума модуля в единичном круге, а для теоремы Иверсена—Цудзи—обобщенный принцип максимума модуля в произвольной области D).

Московский инженерно-строительный
институт им. В. В. Куйбышева

Մ. Վ. ՍԱՄՈԽԻՆ

Կամայական թվով կոմպոնենտներ ունեցող տիրույթում անալիտիկ ֆունկցիայի եզրային վարքի մասին

Հոդվածում դիտարկվում են կամայական թվով կապակցվածության կոմպոնենտներ ունեցող տիրույթներում անալիտիկ ֆունկցիաների եզրային վարքի որոշ հարցեր։ Այդ նպատակով ներմուծվում է, այսպես կոչված հարմոնիկ տիրույթների հասկացությունը, որոնք բավարարում են ռեգուլյարու-

թյան որոշ պայմանների։ Ապացուցվում են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, որպեսզի տիրույթը լինի հարմոնիկ և, այսպիսով, այնտեղ որոշված սահմանափակ անալիտիկ ֆունկցիաները ունենան սահմանափակ եզրային արժեքներ։ Բերված են նաև այդ արդյունքների որոշ այլ կիրառություններ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. Самохин*, Мат. сб., т. 101 (143), с. 189—205 (1976). [2] *М. Самохин*, Мат сб., т. 111 (153), с. 557—578 (1980). [3] *M. Weiss*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser AI, №367 (1965).