

УДК 519.248

МАТЕМАТИКА

М. Р. Мартиросян

Об условиях аналитической зависимости слабо возмущенного гауссовского гиббсовского поля от параметров возмущения

(Представлено академиком АН Армянской ССР Р. В. Амбарцумяном 8/V 1987)

Одной из основных задач теории гиббсовских случайных полей является нахождение точек фазового перехода. Известный подход Янга и Ли к решению этой задачи отождествляет точки фазового перехода с предельными точками нулей статистических сумм при стремлении объема к бесконечности. В настоящей заметке рассматриваются малые возмущения (при помощи потенциала U с бесконечным радиусом взаимодействия) гиббсовского гауссовского случайного поля. Указывается условие малости возмущаемого потенциала, при котором статистические суммы не обращаются в ноль. Отсюда вытекает также аналитичность свободной энергии как функции от параметров возмущения.

Пусть Z^v — v -мерная целочисленная решетка с метрикой

$$d(x^{(1)}, x^{(2)}) = \sum_{i=1}^v |x_i^{(1)} - x_i^{(2)}|, \quad x^{(j)} = (x_1^{(j)}, \dots, x_v^{(j)}) \in Z^v, \quad j = 1, 2$$

и R^k — k -мерное линейное пространство со стандартным скалярным произведением. Элементы множества $(R^k)^\Lambda$, $\Lambda \subset Z^v$, будем называть конфигурациями на Λ .

Гауссовское гиббсовское поле в объеме Λ (под объемом понимается конечное подмножество Z^v) задается при помощи теплицевой $k|\Lambda| \times k|\Lambda|$ -матрицы ($|\Lambda|$ — число точек в объеме Λ) Φ^Λ , относительно элементов которой мы будем предполагать, что $\Phi_{s,t}^\Lambda = 0$ при $d(s, t) > r$, где $r > 0$ — фиксированное число (радиус взаимодействия). Кроме того будем считать выполненным так называемое условие „положительности массы“ $Q \sum_{i \in \Lambda} |x_i|^2 \leq \sum_{s,t \in \Lambda} (\Phi_{s,t}^\Lambda x_s, x_t)$ с некоторым $Q > 0$. Пусть

$\Lambda^c = Z^v \setminus \Lambda$, $\partial\Lambda = \{t \in \Lambda^c : \text{dist}(t, \Lambda) \leq r\}$. Для произвольного объема Λ и конфигурации $\tau \in (R^k)^{\partial\Lambda}$ (граничное условие) плотность гауссовского гиббсовского распределения вероятностей в объеме Λ задается формулой

$$P_\tau^\Lambda(x_\Lambda) = [Z_\Lambda(\Phi^\Lambda, \tau)]^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{s,t \in \Lambda} (\Phi_{s,t}^\Lambda x_s, x_t) - \sum_{s \in \Lambda, u \in \partial\Lambda} (\Phi_{s,u}^\Lambda x_s, \tau_u) \right\},$$

где статистическая сумма

$$Z_{\Lambda}(\Phi^{\Lambda}, \tau) = \int_{(R^k)^{\Lambda}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{s, t \in \Lambda} (\Phi_{s, t}^{\Lambda} x_s, x_t) - \sum_{s \in \Lambda, u \in \partial \Lambda} (\Phi_{s, u}^{\Lambda} x_s, \tau_u) \right\} dx_{\Lambda}.$$

Плотность P_{τ}^{Λ} можно представить в виде

$$P_{\tau}^{\Lambda}(x_{\Lambda}) = \left(\frac{\det \Phi^{\Lambda}}{\pi^{k|\Lambda|}} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \{ -(\Phi^{\Lambda}(x_{\Lambda} - \bar{x}_{\Lambda}(\tau)), x_{\Lambda} - \bar{x}_{\Lambda}(\tau)) \}$$

где $x_{\Lambda} = (x_t, t \in \Lambda)$ и $\bar{x}_{\Lambda}(\tau)$ — решение системы линейных уравнений $\sum_{t \in \Lambda} \Phi_{s, t}^{\Lambda} \bar{x}_t + \sum_{u \in \partial \Lambda} \Phi_{u, s}^{\Lambda} \tau_u = 0, s \in \Lambda$.

Пусть $\mathcal{F}$ — класс всевозможных отображений $F: \bigcup_{A \subset Z^v} (R^k)^A \rightarrow \bigcup_{A \subset Z^v} (R^k)^A$ таких, что $F(x_A) \in (R^k)^A$. Пусть $A \subset Z^v$ и $\sigma \in (R^k)^A$. Обозначим через I_{σ} отображение из класса $\mathcal{F}$ такое, что $I_{\sigma}(x) = x_{B \cap A^c} \cup \sigma_{B \cap A}$ для любых $B \subset Z^v, x \in (R^k)^B$ ($x_{B \cap A^c}, \sigma_{B \cap A}$ — суть ограничения конфигураций x и σ на соответствующие множества). Для произвольного $F \in \mathcal{F}$ через $\text{supp}_{Z^v} F$ обозначим множество всех точек $t \in Z^v$ таких, что для некоторых $A \subset Z^v, t \in A$ и $x_A^{(1)}, x_A^{(2)} \in (R^k)^A$ — конфигураций, отличающихся лишь в точке $t, F(x_A^{(1)}) \neq F(x_A^{(2)})$.

Рассмотрим комплекснозначный потенциал

$$U = \{U_A(x_A), A \subset Z^v, |A| < \infty, x_A \in (R^k)^A\} \quad (1)$$

и для произвольного $F \in \mathcal{F}$ определим потенциал U^F системой равенств $U_A^F(x_A) = U(F(x_A)), A \subset Z^v, |A| < \infty, x_A \in (R^k)^A$. Пусть $V \subset Z^v$ — произвольный объем и $F \in \mathcal{F}$ с $\text{supp}_{Z^v} F \subset V$. Условным гамильтонианом (энергией) для потенциала U (в объеме V , при условии F) назовем величину

$$H_U(x_V|F) = \sum_{A \subset Z^v} U_A^F(x_{A \cap V}). \quad (2)$$

Пусть далее $\tau \in (R^k)^{\partial V}$ — граничное условие. Условной статистической суммой, отвечающей потенциалу U (в объеме V , при условиях F и τ) назовем величину

$$Z_V(U|F, \tau) = \int_{(R^k)^V} \exp \{ -H_U(x_V|F) \} P_{\tau}^V(x_V) dx_V. \quad (3)$$

В соответствии с этим гамильтониан $H_{\Phi+U}(x_V|F, \tau) = H_U(x_V|F) + \frac{1}{2} \sum_{s, t \in V} (\Phi_{s, t}^V x_s, x_t) + \sum_{s \in V, u \in \partial V} (\Phi_{s, u}^V x_s, \tau_u)$ можно трактовать как энергию возмущенного (при помощи потенциала U) гауссовского поля и величину $Z_V(\Phi+U|F, \tau) = Z_V(\Phi^V, \tau) Z_V(U|F, \tau)$ как статистическую сумму, отвечающую потенциалу $\Phi+U$ (в объеме V , при условиях F и τ).

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. Пусть потенциал (1) удовлетворяет условию

$$\sum_{A \subset Z^v: t \in A} \|U_A\| \exp \{ \kappa |A| \} < \gamma_t, t \in Z^v, \quad (4)$$

где $\kappa > 0$ — некоторое фиксированное число, $0 \leq \gamma_t < 1, t \in Z^v$, и $\|U_A\| =$

$= \sup_{x_A \in (R^k)^A} |U_A(x_A)|$. Тогда существуют константы C и γ , зависящие лишь от κ и характеристик ν, k, r и Q основного гауссовского поля, такие, что равномерно по всем Λ и внешним условиям $F \in \mathcal{F}$ с $\text{supp}_{Z^\nu} F \subset \Lambda$

$$|\ln Z_\Lambda(U|F, \tau \equiv 0)| \leq C \sum_{t \in \Lambda} \gamma_t, \quad (5)$$

если только $\gamma_t \leq \gamma, t \in Z^\nu$ (логарифм в (5) понимается в смысле главного значения).

Следствие. Пусть потенциал $U(z_1, \dots, z_m)$ зависит от комплексных параметров $z_1, \dots, z_m$, причем в некоторой области $D \subset \mathbb{C}^m$ значений этих параметров, представляющей собой полукруг с центром в нуле, все функции $U_A(x_A; z_1, \dots, z_m), A \subset Z^\nu, |A| < \infty, x_A \in (R^k)^A$ аналитичны и при $(z_1, \dots, z_m) \in D \cap \mathbb{R}^m$ вещественны. Тогда, если потенциал $U(z_1, \dots, z_m)$ удовлетворяет условию (4) и γ достаточно мало, то свободная энергия

$$F(z_1, \dots, z_m) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} |\Lambda|^{-1} \ln Z_\Lambda(\Phi + U|F, \tau \equiv 0)$$

существует и является аналитической функцией в D .

Оценка (4) является в некотором смысле неулучшаемой, а именно, справедлива

Теорема 2. Пусть $\varphi: Z^+ \rightarrow R^+$, причем при всех $\kappa > 0$

$$\liminf \varphi(n) \exp\{-\kappa n\} = 0.$$

Тогда для любого $\gamma > 0$ существует потенциал $U^{(\gamma)} = \{U_A^{(\gamma)}(x_A), A \subset Z^\nu, x_A \in (R^k)^A\}$ такой, что

$$\sum_{A: t \in A} \|U_A^{(\gamma)}\| \varphi(|A|) < \gamma, t \in Z^\nu$$

и для некоторой последовательности объемов $\Lambda_n \rightarrow \infty$ (в смысле Ван Хова)

$$Z_{\Lambda_n}(\Phi + U|F_{\Lambda_n}^0, \tau \equiv 0) = 0,$$

где $F_{\Lambda_n}^0, n = 1, 2, \dots$ таковы, что ограничение любой конфигурации $F_{\Lambda_n}^0(x_A)$ на Λ_n^c равно 0.

Доказательство теоремы 1 основано на получении индуктивных (по величине объема) оценок статистических сумм и соотношений между ними.

Отметим, что аналогичный результат для моделей с компактным множеством значений в случае независимого возмущаемого поля был получен ранее в ⁽¹⁾ методом кластерных разложений. Кроме того, в ⁽¹⁾ исследовались возмущения специального вида.

В заключение автор выражает благодарность Р. Л. Добрушину за постановку задачи и полезные обсуждения.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного
университета

Թույլ զրգոված գաուսյան գիբսյան դաշտի անալիտիկ կախվածությունը
զրգուման սլարամետրեներից

Անխատանքում դիտարկվում են Z^γ — γ -չափանի ամբողջաթիվ ցանցի
վրա որոշված պատահական գաուսյան գիբսյան դաշտերի ոչ ֆինիտ զրգը-
ռումները կոմպլեքս-արժեք

$$U = \{U_A(x_A), x_A \in (R^k)^A, \text{card}(A) < \infty\}$$

պոտենցիալի միջոցով: Ցույց է տրվում, որ եթե U գրգռող պոտենցիալը
բավարարում է

$$\sum_{A: i \in A} |U_A| \exp\{\chi|A|\} < \gamma_i < \gamma$$

պալմանին (ինչ-որ $\chi > 0$ և γ -ի համար), ապա վիճակագրական գումարը հա-
վասար չէ 0-ի: Այստեղից հետևվում է ազատ էներգիայի գոյությունը: Բացի
այդ, եթե բոլոր $U_A(x_A)$, $A \subset Z^\gamma$, $x_A \in (R^k)^A$ անալիտիկորեն կախված են
 $z_1, \dots, z_n$ պարամետրներից, վերջիններիս փոփոխման $D \subset C^n$ տիրույթում
(D -ն պոլիշրջան է), ապա նույն հատկությամբ օժտված է նաև ազատ
էներգիան:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ В. А. Малышев, Р. А. Минлос, Гиббсовские случайные поля. Метод кластер-
ных разложений, Наука, М., 1985.