ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXV 1987 2

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

С. Е. Маркосян, Г. С. Гаспарян

О гипотезе Бержа

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 12/III 1987)

В настоящей статье исследуются совершенные графы в связи с сильной гипотезой Бержа: граф совершенный тогда и только тогда, когда граф и его дополнение не содержат нечетных дырок ([1]). Доказана ранее высказанная гипотеза ([2,3]): если критически несовершенный граф (Р-граф) G и его дополнение содержат неполную критическую компоненту, то G—нечетная дырка или ее дополнение. Из этого следует, что нижеприведенные утверждения равносильны гипотезе Бержа.

С1. Граф G совершенный тогда и только тогда, когда критические компоненты любого подграфа полные.

С2. Граф G совершенный тогда и только тогда, когда для любого подграфа $G'\subseteq G$, $k(G')\geqslant\alpha(G')$, где $k(G')$—число критических компонент, а $\alpha(G')$—число независимости G'.

С3. Граф G совершенный тогда и только тогда, когда для любого подграфа $G'\subseteq G$ $k(G')\geqslant\sigma(G')$, где $\sigma(G')$—кликоматическое число G'.

Приведем необходимые определения и обозначения. Пусть $G=(V, E)$—обыкновенный конечный граф, а $\alpha(G)$, $\varphi(G)$, $\chi(G)$, $\sigma(G)$—соответственно число независимости, плотность, хроматическое число и кликоматическое число. Граф G называется совершенным, если для любого подграфа $G'\subseteq G$, $\chi(G')=\varphi(G')$. Из справедливости первой гипотезы Бержа ([4,5]) следует что это определение равносильно выполнению условия: $\sigma(G')=\alpha(G')$. G называется Р-графом (критически несовершенным), если он несовершенный, но любой его подграф совершенный. Нечетной дыркой будем называть простой цикл нечетной длины $\geqslant 5$, который не содержит диагоналей. Ребро $u=(x, y)$ называется критическим, если $\alpha(G\setminus u)>\alpha(G)$. Обозначим через $G_k=(V, E')$, где $E'\subseteq E$, подмножество всех критических ребер. Подграф графа G, порожденный множеством вершин компоненты связности графа G_k, назовем критической компонентой ([2]). В работах ([2,3,6–8]) изучаются свойства критических ребер и критических компонент в связи с совершенными графами.

В ([2,3]) сформулированы две гипотезы, которые вместе взятые равносильны гипотезе Бержа:

С1. Граф совершенный тогда и только тогда, когда критические компоненты любого подграфа полные.

C1[1]. Критические компоненты любого подграфа полные тогда и только тогда, когда, граф и его дополнение не содержат нечетных дырок.

В настоящей работе доказывается, что только C1 уже равносильна гипотезе Бержа. Для этого достаточно доказать следующую теорему:

Теорема 1. *Если P-граф G и его дополнение содержат неполные критические компоненты, то G или нечетная дырка, или ее дополнение.*

До того как перейдем к доказательству этой теоремы, приведем известные основные свойства P-графов, которые получены в работах [3–10].

A1. Граф G и его дополнение $\overline{G}$ одновременно совершенные или несовершенные (первая гипотеза Бержа), и число вершин P-графа $|V(G)|=\alpha(G)\varphi(G)+1$.

A2. В P-графе вне произвольной клики Q мощности $\varphi(G)$ (φ-клика) есть точно одно независимое множество S мощности $\alpha(G)$ (α-независимое множество) такое, что $S\cap Q=\varnothing$, и наоборот [10].

A3. Через каждое критическое ребро P-графа проходит $\varphi(G)-$ -1, φ-клик [3].

A4. Если число вершин в критической компоненте P-графа $\leqslant\varphi(G)$, то эта компонента полная (полный граф). Любая критическая цепь длины $<\varphi(G)$ (состоящая из критических ребер) порождает полный подграф [7].

A5. В P-графе не существует подмножество, содержащее $\alpha(G)+\varphi(G)-1$ вершин, пересечение которого непусто с каждой φ-кликой и с каждым α-независимым множеством [9]

Переходим к доказательству теоремы 1. Пусть G P-граф и его дополнение $\overline{G}$ содержит неполную критическую компоненту. Если $\alpha(G)=2$ или $\varphi(G)=2$, то теорема верна, так что будем предполагать: $\alpha(G)>2$, $\varphi(G)>2$.

Пусть $\alpha=\alpha(G)$, $\varphi=\varphi(G)$, $\overline{\alpha}=\alpha(\overline{G})$, $\overline{\varphi}=\varphi(\overline{G})$. Тогда $\alpha=\overline{\varphi}$, $\varphi=\overline{\alpha}$. Если P-граф $\overline{G}$ содержит неполную критическую компоненту, то из свойства A4 следует, что существует критическая цепь длины $\alpha=\overline{\varphi}$, $(v_1, v_2), \ldots, (v_\alpha, v_{\alpha+1})$, все вершины которой смежны, кроме v_1, и $v_{\alpha+1}$. Для каждого критического ребра (v_i, v_{i+1}) существует независимое множество $\overline{S}_{i,i+1}$ $|\overline{S}_{i,i+1}|=\overline{\alpha}-1$ такое, что $\overline{S}_{i,i+1}\cup\{v_i\}$ и $\overline{S}_{i,i+1}\cup\{v_{i+1}\}$ $\overline{\alpha}$-независимые множества. Исходя из свойств P-графа, нетрудно убедиться, что $\overline{S}_{12}, \ldots, \overline{S}_{\alpha,\alpha+1}$ попарно не пересекаются и $V(\overline{G})=$ $=\{\bigcup_{i=1}^{\alpha}\overline{S}_{i,i+1}\}\cup\{v_1, v_2, \ldots, v_\alpha, v_{\alpha+1}\}$ [6].

Из свойства A3 следует, что существует единственная φ-клика Q, которая содержит вершины $v_{i+1}, \ldots, v_{\alpha+1}$ и не содержит вершины $v_1, \ldots, v_i$. Очевидно, что единственное $\overline{\alpha}$-независимое множество вне Q, совпадает с $\overline{S}_{i,i+1}\cup\{v_i\}$. Точно так же α-независимое множество вне Q, $\{v_1, \ldots, v_i\}\subseteq Q$, $\{v_{i+1}, \ldots, v_{\alpha+1}\}\cap Q=\varnothing$ является $\overline{S}_{i,i+1}\cup\{v_{i+1}\}$.

Вершину v в $\overline{G}$ назовем типа $i, i+1$, если $v \in \{v_i, v_{i+1}\} \cup \overline{S}_{i,i+1}$. Пусть $Q_{i,i+1}$, $i=1, 2, \ldots, \alpha$, полные подграфы В G, соответствующие независимым множествам $\overline{S}_{i,i+1}$ в $\overline{G}$, ребро $(v_1, v_{\alpha+1})$ критическое, $S_{1,\alpha+1}=\{v_2, \ldots, v_\alpha\}$, вершины v_i, v_{i+1} не смежны для $i=1, \ldots, \alpha$. Вершина v_i с $Q_{i,i+1}$ и вершина v_{i+1} с $Q_{i,i+1}$ образуют φ-клику. G также содержит неполную критическую компоненту, значит, содержит критическую цепь $(u_1, u_2), \ldots, (u_\varphi, u_{\varphi+1})$ длины φ. Для любого критического ребра (u_i, u_{i+1}), $i=1, 2, \ldots, \varphi$, в силу А3, не может быть, чтобы $u_i \in Q_{k,k+1}$, $u_{i+1} \overline{\in} Q_{k,k+1} \cup \{v_k, v_{k+1}\}$, так как $u_i \in Q_{k,k+1} \cup \{v_k\}$, $u_i \in Q_{k,k+1} \cup \{v_{k+1}\}$.

Из свойства А4 следует, что если вершина $v_j=u_p$, $v_{j+1}=u_q$, то $p=1$, $q=\varphi+1$, для любого $j=1, 2, \ldots, \alpha$. В противном случае вершины v_j и v_{j+1} связаны критической цепью длины $<\varphi$, и они должны быть смежными в силу А4. Если вершины v_j и v_{j+1} принадлежат критической цепи $(u_1, u_2, \ldots, u_{\varphi+1})$, то критическая цепь проходит через все вершины $\{v_j\} \cup Q_{j,j+1} \cup \{v_{j+1}\}$.

Значит, могут быть три случая:

1) критическая цепь состоит из вершины v_j, части из $Q_{j-1,j}$ и части $Q_{j,j+1}$;

2) критическая цепь совпадает с подграфом G_k, порожденным вершинами $\{v_j\} \cup Q_{j,j+1} \cup \{v_{j+1}\}$;

3) критическая цепь проходит через ребро $(v_1, v_{\alpha+1})$.

Пусть $S_{i,i+1}$—независимое множество из $(\alpha-1)$ вершин, соответствующее критическому ребру (u_i, u_{i+1}), $i=1, 2, \ldots, \varphi$. Тогда ясно, что $Q_{j,j+1}$ для любого $j=1, \ldots, \alpha$ содержат вершины всех типов, кроме вершины одного типа.

Случай 1. Пусть $u_k=v_j$, $k\neq 1, \varphi+1$ и $j\neq 1, \alpha+1$. Пусть $x_i \in Q_{i-1,i}$, $i=2, \ldots, j-1$ вершины типа $k-1, k$, а $y_l \in Q_{l,l+1}$, $l=j+1, \ldots, \alpha$ вершины типа $k, k+1$. Не нарушая общность можно предполагать, что $Q_{j,j+1} \neq \{u_{k+1}, \ldots, u_{\varphi+1}\}$ (в противном случае $Q_{j-1,j} \neq \{u_1, \ldots, u_{k-1}\}$). Легко можно показать, что α-независимое множество вне φ-клики $Q_{j-1,j} \cup \{v_j\}$ есть $\{v_1, \ldots, v_{j-1}, u_{k+1}, y_{j+1}, \ldots, y_\alpha\}$, а вне φ-клики $Q_{j,j+1} \cup \{v_j$ есть $\{x_2, \ldots, x_{j-1}, u_{k-1}, v_{j+1}, \ldots, v_{\alpha+1}\}$. Берем $P=\{u_k, x_2, \ldots, x_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_\alpha, v\} \cup \{\{Q_{j-1,j} \cup Q_{j,j+1}\} \setminus \{u_\alpha, \ldots, u_{\varphi+1}\}\}$, где $v=v_1$, если $j>2$, и $v=v_{\alpha+1}$, если $j=2$. Ясно, что $|P|=\alpha+\varphi-1$. α-независимое множество S в $G \setminus P$ не может быть вне $Q_{j-1,j} \cup \{v_j\}$ или вне $Q_{j,j+1} \cup \{v_j\}$. Значит, S содержит одну вершину из $u_2, \ldots, u_{k-1}$ и из $u_{k+1}, \ldots, u_{\varphi+1}$, что невозможно. φ-клика Q в $G \setminus P$ не может совпадать с $Q_{j-1,j} \cup \{v_j\}$ или с $Q_{j,j+1} \cup \{v_j\}$. Следовательно, она должна содержать вершину из $v_{j+1}, \ldots, v_{\alpha+1}$ и из $v_1, \ldots, v_{j-1}$, значит, $\{v_1, v_{\alpha+1}\} \subset Q$, что опять невозможно. Аналогичным образом доказывается случай 2.

Случай 3. Пусть $v_1=u_k$, $v_{\alpha+1}=u_{k+1}$. Рассмотрим граф $\overline{G}$. В нем множества $\{v_1, \ldots, v_{\alpha+1}\}$ и $\{u_1, \ldots, u_{\varphi+1}\}$ меняются ролями, и теперь уже $\{v_1, \ldots, v_{\alpha+1}\}$ критическая цепь, которая не проходит через критическое ребро $(u_1, u_{\varphi+1})$. Так как $\overline{G}$ тоже типа Р, то этот случай мы уже рассматривали. Теорема 1 полностью доказана.

Нетрудно убедиться, что теорема 1 является обобщением теоремы, приведенной в ([9]). Из теоремы 1 следует.

Теорема 2. *Утверждение* C1 *равносильно гипотезе Бержа.* Покажем, что C2 и C3 тоже равносильны гипотезе Бержа.

Теорема 3. C2 *равносильно гипотезе Бержа.*

Из справедливости гипотезы Бержа следует C2, так как из условия $G'\subseteq G$, $k(G')\geqslant\alpha(G')$ следует, что G не содержит нечетных дырок и их дополнения. Предположим, что P-граф не содержит нечетных дырок и их дополнения. Тогда, согласно теореме 1, или $k(G)\geqslant\alpha(G)$, или $k(\overline{G})\geqslant\alpha(\overline{G})$. Так как G является P-графом, то для любого $G'\in G$, $k(G')\geqslant\alpha(G')$ и $k(\overline{G}')\geqslant\alpha(\overline{G}')$, но это противоречит C2.

Теорема 4. C3 *равносильно гипотезе Бержа.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.

Ереванский государственный
университет

Ս. Ե. ՄԱՐԿՈՍՅԱՆ, Գ. Ս. ԳԱՍՊԱՐՅԱՆ

Բերժի հիպոթեզի մասին

Հոդվածում ուսումնասիրվում են կատարյալ գրաֆները՝ կապված Բերժի ուժեղ հիպոթեզի հետ՝ գրաֆը կատարյալ է այն և միայն այն դեպքում, երբ գրաֆը և նրա լրացումը չեն պարունակում կենտ խոռոչներ։ Ապացուցված է նախկինում ձևակերպված հետևյալ հիպոթեզը՝ եթե կրիտիկական ոչ կատարյալ G-գրաֆը և նրա լրացումը պարունակում են ոչ լրիվ կրիտիկական կոմպոնենտ, ապա G-ն կամ կենտ խոռոչ է, կամ կենտ խոռոչի լրացում։ Այստեղից հետևում է, որ հետևյալ պնդումները համարժեք են Բերժի հիպոթեզին։

1. G-գրաֆը կատարյալ է այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա կամայական ենթագրաֆի կրիտիկական կոմպոնենտները լրիվ են։

2. G-գրաֆը կատարյալ է այն և միայն այն դեպքում, երբ G-ի կամայական G′ ենթագրաֆի համար, $k(G')\geqslant\alpha(G')$, որտեղ $k(G')$-ը G′-գրաֆի կրիտիկական կոմպոնենտների թիվն է, իսկ $\alpha(G')$-ը G′-ի անկախության թիվն է։

3. G-գրաֆը կատարյալ է այն և միայն այն դեպքում, երբ G-ի կամայական G′ ենթագրաֆի համար, $k(G')\geqslant\sigma(G')$, որտեղ $\sigma(G')$-ը G′-գրաֆի ծածկույթի թիվն է։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *C. Berge*, Graphs et hypergraphes. Dunod, Paris, 1970. [2] *С. Е. Маркосян*, ДАН АрмССР, т. 60, № 4 (1975). [3] *С. Е. Маркосян*, Прикладная математика, 1, Межвуз. сб., ЕрГУ 1981. [4] *L. Lovasz*, and the Perfect Graph Discrete Mathematics, v. 2 p. 253—268 (1972). [5] *L. Lovasz*, Journal of Combinatorial Theory (B), v. 13, p. 95—98 (1972). [6] *А. С. Маркосян*, Ученые записки. ЕГУ, № 1, (1985). [7] *С. Е. Маркосян, И. А. Карапетян*, ДАН АрмССР, т. 63, № 5 (1976). [8] *С. Е. Маркосян, И. А. Карапетян*, Прикладная математика, № 3 Межвуз. сб., ЕрГУ, 1984. [9] *V. Chvatal*, J. Combinatorial Theory (B), v. p. 139—141 (1976). [10] *M. Padberg*, Math. Programming, v. 6, p. 180—196 (1974).