ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXXV 1987 2

УДК 517.53+517.916

МАТЕМАТИКА

С. Ц. Саркисян

О порядке роста целых функций многих переменных и оценка порядка целых решений алгебраических дифференциальных уравнений в частных производных

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. У. Аракеляном 1/III 1987)

Целью данной работы является получение аналогов теорем Вимана—Валирона ([1]). Введено понятие порядка роста целых функций многих комплексных переменных, обобщающее понятие порядка роста целой функции одной переменной.

Далее, полученные теоремы применены для оценки порядка роста целых решений алгебраических дифференциальных уравнений в частных производных.

1. Пусть

$$w(z_1, \ldots, z_n)=\sum_{i_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{i_n=0}^{\infty} a_{i_n \ldots i_n}\cdot z_1^{i_1}\ldots z_n^{i_n} \tag{1}$$

целая трансцендентная функция n комплексных переменных. Обозначим через $M(r, w)=\max|w(z_1, \ldots, z_n)|$ на множестве $\{G:|z_1|=\ldots=|z_n|=r\}$, а через $m(r, w)=\max\limits_{i_1,\ldots, i_n}|a_{i_1,\ldots, i_n}|\cdot r^{i_1+\ldots+i_n}$ и назовем максимальным членом w на G. Ясно, что $m(r, w)$ существует и достигается на конечном множестве членов ряда (1). Пусть $m(r, w)$ достигается на конечном множестве $\{i_{k_1}, \ldots, i_{k_n}\}$. Обозначим через $\nu(r, w)=\max(i_{k_1}+\ldots+i_{k_n})$ и назовем центральным индексом w на G.

Существует несколько определений максимального члена и центрального индекса (см. ([2,3])).

С помощью этих понятий получен ряд результатов, среди которых важнейшими являются следующие теоремы (см. еще ([4])).

Теорема 1. *Пусть $w(z_1, \ldots, z_n)$—целая трансцендентная функция и $|w(\xi_1, \ldots, \xi_n)|=M(r, w)$, $|\xi_1|=\ldots|\xi_n|=r$, тогда при $r\geq 0$ вне некоторого множества конечной логарифмической меры по r имеют место*

$$\nu(r, w)<A[\ln m(r, w)]^{1+\delta_1}; \tag{2}$$

$$m(r, w)\leqslant M(r, w)\leqslant B\cdot m(r, w)[\ln m(r, w)]^{\frac{3}{2}+\delta_2}; \tag{3}$$

$$\lim_{r\to\infty}\left[\frac{\sum\limits_{l=1}^{n}\xi_l w'_{z_l}(\xi_1, \ldots, \xi_n)}{\nu(r, w)\cdot w(\xi_1, \ldots, \xi_n)}\right]=1, \tag{4}$$

причем

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\xi_i w'_{z_i}(\xi_1, \ldots, \xi_n)}{\nu(r, w)\cdot w(\xi_1, \ldots, \xi_n)} = \vartheta_{0,\ldots,1,\ldots,0}, \tag{5}$$

где $A=A(\delta)$, $B=B(\delta)$ *постоянные,* $\delta>0$ *сколь угодно малая величина,* $0\leqslant\vartheta_{0,\ldots,1,\ldots,0}\leqslant 1 (i=1, \ldots, n)$, $\vartheta_{1,0,\ldots,0}+\ldots+\vartheta_{0,0,\ldots,1}=1$.

Теорема 2. *Пусть* $w(z_1, \ldots, z_n)$*—целая трансцендентная функция и* $|w(\xi_1, \ldots, \xi_n)|=M(r, w)$, $|\xi_1|=\ldots=|\xi_n|=r$, *тогда при* $r\geqslant 0$ *вне некоторого множества конечной логарифмической меры по* r *имеет место*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\xi_1^{p_1}\ldots\xi_n^{p_n}\cdot w^{(p_1+\ldots+p_n)}_{(\xi_1,\ldots,\xi_n)}}{[\nu(r, w)]^{p_1+\ldots+p_n}\cdot w(\xi_1, \ldots, \xi_n)} = \vartheta_{p_1,\ldots,p_n}, \tag{6}$$

где $p_i\geqslant 0$ $(i=1, 2, \ldots)$ *конечные целые, а* $0\leqslant\vartheta_{p_1,\ldots,p_n}\leqslant 1$*—постоянные числа. В частности, при* $n=2$

$$\vartheta_{p,0}+p_1\vartheta_{p_1-1,1}+\frac{p_1(p_1-1)}{1\cdot 2}\vartheta_{p_1-2,2}+\ldots+\vartheta_{0,p_2}=1. \tag{7}$$

Имея в виду более общие ситуации, введем следующие обозначения. Обозначим через

$$S(z_1, \ldots, z_n)=\frac{z_1 w'_{z_1}}{w(z)}+\ldots+\frac{z_n w'_{z_n}}{w(z)} \tag{8}$$

и назовем S-характеристикой функции w.

В этих обозначениях из теорем 1 и 2 получаем: если $w=w(z_1, \ldots, z_n)$ целая трансцендентная функция, то вне некоторого множества конечной логарифмической меры по r, на множестве $\{X_w : |\xi_1|=\ldots=|\xi_n|=r,\ |w(\xi_1, \ldots, \xi_n)|=M(r, w)$

$$S(\xi_1, \ldots, \xi_n)=\nu(r, w)+\delta(r); \tag{9}$$

$$w^{(k_1+\ldots+k_n)}_{(\xi_1,\ldots,\xi_n)}=\frac{S^{k_1+\ldots+k_n}_{(\xi_1,\ldots,\xi_n)}}{\xi_1^{k_1}\ldots\xi_n^{k_n}}\cdot w(\xi_1, \ldots, \xi_n)(1+\varepsilon(\xi_1, \ldots, \xi_n)), \tag{10}$$

где $\delta(r)$ и $\varepsilon(\xi_1, \ldots, \xi_n)\to 0$ при $r\to\infty$.

Определение 1. *Будем говорить, что аналитическая функция* $w(z_1, \ldots, z_n)$ *принадлежит классу* $S(x)$, *если существует неограниченное множество* $X_w=\{\xi_1, \ldots, \xi_n : |\xi_1|=\ldots=|\xi_n|=r\}$ *такое, что при любых натуральных* $k_1\geqslant 0, \ldots, k_n\geqslant 0$

$$\lim_{r\to\infty}\left\{\frac{\xi_1^{k_1}\ldots\xi_n^{k_n}}{S^{k_1+\ldots+k_n}(\xi_1, \ldots, \xi_n)}\cdot\frac{w^{(k_1+\ldots+k_n)}_{(\xi_1,\ldots,\xi_n)}}{w(\xi_1, \ldots, \xi_n)}\right\}=\vartheta_{p_1,\ldots,p_n}, \tag{11}$$

где $\vartheta_{p_1,\ldots,p_n}=\mathrm{const}$, $(\xi_1, \ldots, \xi_n)\in X_w$.

Множество X_w назовем характеристическим множеством, а функцию $w=w(z_1, \ldots, z_n)$ S-целой функцией.

Определение 2. *Пусть* $w(z_1, \ldots, z_n)$ S*-целая функция.* S*-порядком* w *назовем*

$$\rho_S=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln|S(\xi_1, \ldots, \xi_n)|}{\ln r},\ (\xi_1, \ldots, \xi_n)\in X_w, \tag{12}$$

где $S(z_1, \ldots, z_n)$ S-характеристика, а X_w—характеристическое множество функции w.

Если w целая функция, то из (2), (3) и (9) получаем, что $w \in S(X)$, т. е. S—целая функция, и ее S-порядок равен

$$\rho_S = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\ln M(r)}{\ln r},$$

т. е. S-порядок функции w отождествляется с обычным порядком функции $M(r, w)$.

2. Приведем некоторые теоремы, которые показывают, как можно исследовать рост решения дифференциальных уравнений в частных производных с помощью приведенных выше понятий и теорем.

Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных

$$F\left(z_1, \ldots, z_n, \frac{\partial w}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial w}{\partial z_n}, \ldots, \frac{\partial^k w}{\partial z_n^k}\right) = 0, \tag{13}$$

где F—многочлен от своих переменных и неприводим.

Если $w(z_1, \ldots, z_n) \in S(X)$, из (11) следует

$$w^{(k_1+\ldots+k_n)}_{z_1^{k_1}\ldots z_n^{k_n}}(\xi_1, \ldots, \xi_n) = c_{k_1,\ldots,k_n}\left(\frac{S^{k_1\ldots+k_n}(\xi_1, \ldots, \xi_n)}{\xi_1^{k_1}\ldots\xi_n^{k_n}}\right)w(\xi_1, \ldots, \xi_n(1+$$

$$+\varepsilon(\xi_1, \ldots, \xi_n)), \tag{14}$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_n \in X_w$, $\varepsilon_k(\xi_1, \ldots, \xi_n) \to 0$ при $|\xi_1| = \ldots = |\xi_n| = r \to \infty$, т. е.

$$w^{(k_1+\ldots+k_n)}_{z_1^{k_1}\ldots z_n^{k_n}} = \beta_{k_1,\ldots,k_n}(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n)\cdot\left(\frac{S(\xi_1, \ldots, \xi_n)}{r}\right)^{k_1+\ldots+k_n} w(\xi_1, \ldots, \xi_n)\times$$

$$\times(1+\varepsilon(\xi_1, \ldots, \xi_n)), \tag{15}$$

где $\vartheta_i = \arg\xi_i (i=1, \ldots, n)$.

При $(z_1, \ldots, z_n) \in X_w$, в предположении, что уравнение (13) имеет решение из класса $S(X)$, в силу (15) из (13) получаем

$$O_F(z_1, \ldots, z_n, S, w) \equiv F(z_1, \ldots, z_n, w, \beta_{1,0,\ldots,0}\, r^{-1}Sw, \ldots, \beta_{0,0,\ldots,k}\, r^{-k}S^n w) =$$

$$=0. \tag{14}$$

$O_F(z_1, \ldots, z_n, S, w)$ многочлен относительно S и w, и он неприводим.

В зависимости от поведения S-целого решения уравнения (13) из класса $S(X)$ при $(z_1, \ldots, z_n) \in X_w$ и $r\to\infty$ имеется несколько случаев.

I. Пусть w S-целое решение уравнения (13) из класса $S(X)$ и для него

$$\lim_{|z_1|=\ldots=|z_n|=r\to\infty} w(z_1, \ldots, z_n) = \infty, \quad (z_1, \ldots, z_n) \in X_w^\infty \subset X_w. \tag{15}$$

Скажем, что S-целое решение уравнения (13) из класса $S(X)$ принадлежит классу $S^\infty(X)$, если для этого решения имеет место (15).

Пусть $O_F(z, S, w)$—многочлен степени m относительно w. После деления левой и правой части (14) на w^m при $r\to\infty$ получим асимптотическое уравнение

$$R_F^{\infty}(r, \vartheta, S) \equiv \sum_{l=0}^{q} a_{m_l} \cdot r^{m_l} \cdot S^l = 0, \ (z_1, \ldots, z_n) \in X_m^{\infty}, \tag{16}$$

где $m_1, \ldots, m_q$—действительные числа. $a_{m_j}(\vartheta)$, $j=1, 2, \ldots, q$—непрерывные функции в любой ограниченной области G комплексного пространства переменных $(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n) = \vartheta$. Уравнение (16) назовем характеристическим уравнением, а многочлен R_F^{∞}—характеристическим многочленом уравнения (13) на множестве X_w в классе $S^{\infty}(X)$. В дальнейшем предположим, что многочлен R_F^{∞} неприводим. Нас будет интересовать асимптотическое поведение решений уравнения (16) при $r \to \infty$.

Определение. *Скажем, что характеристический многочлен $R_F^{\infty}(r, \vartheta, S)$ уравнения* (13)

1) *вырождается, если он одночлен и в* (16) $a_{m_q} \neq 0$,

2) *не вырождается, если он отличен от одночлена и в* (16) $a_{m_q} \neq 0$.

Теорема 1. *Пусть задано алгебраическое дифференциальное уравнение* (13), *где F неприводимый многочлен от своих переменных, и пусть характеристический многочлен R_F^{∞} уравнения* (6) *неприводим, тогда*

1) *если характеристический многочлен R_F^{∞} уравнения* (13) *вырождается, то уравнение* (13) *S-целых решений из класса $S^{\infty}(X)$ не имеет,*

2) *если характеристический многочлен R_F^{∞} уравнения* (13) *не вырождается, то всякое S-целое решение уравнения* (13) *из класса $S^{\infty}(X)$ имеет конечный S-порядок.*

Замечание. Условия неприводимости характеристического многочлена, и то, что в (16) $a_{m_q} \neq 0$, в теореме 1 существенны. В противном случае уравнение (13) может иметь S-целые решения как конечного, так и бесконечного S-порядка.

II. Пусть w S-целое решение уравнения (13) из класса $S(X)$ и для него

$$\lim_{|z_1| = \ldots = |z_n| = r \to \infty} w(z_1, \ldots, z_n) = 0, \ (z_1, \ldots, z_n) \subset X_w^0 \subset X_w. \tag{17}$$

Скажем, что S-целое решение уравнения (13) из класса $S(X)$ принадлежит классу $S^0(X)$, если для этого решения имеет место (17).

Аналог теоремы 1 имеет место и в классе $S^0(X)$, который не будем формулировать.

III. Пусть w S-целое решение уравнения (13) из класса $S(X)$ и для него

$$\lim_{|z_1| = \ldots |z_n| = r \to \infty} w(z_1, \ldots, z_n) = c, \ 0 < |c| < \infty, \ z \in X_w^c \subset X_w. \tag{18}$$

Скажем, что S-целое решение уравнения (13) из класса $S(X)$ принадлежит классу $S^c(X)$, если для этого решения имеет место (18).

Аналогично п. I получаем, что S-целые решения уравнения (13) из класса $S^c(X)$ асимптотически равны решениям уравнения

$$R^c_F(r, \vartheta, S) \equiv \sum_{l=0}^{q} a_{m_l} \cdot r^{m_l} \cdot S^l = 0, \ (z_1, \ldots, z_n) \in X^c_{\alpha'}. \tag{19}$$

Уравнение (19) назовем характеристическим уравнением, а многочлен R^c_F характеристическим многочленом уравнения (13) в классе $S^c(X)$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть задано алгебраическое дифференциальное уравнение* (13), *где F—неприводимый многочлен от своих переменных, и пусть характеристический многочлен R^c_F уравнения* (13) *неприводим, тогда*

1) *если характеристический многочлен R^c_F уравнения* (13) *вырождается, то уравнение* (13) *S-целых решений из класса $S^c(X)$ не имеет,*

2) *если характеристический многочлен R^c_F уравнения* (13) *не вырождается, то всякое мероморфное решение уравнения* (13) *из класса $S^c(X)$ имеет конечный S-порядок.*

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Ս. Ծ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Մի քանի կոմպլեքս փոփոխականների ֆունկցիաների կարգի մասին և մասնակի ածանցյալներով հանրահաշվական դիֆերենցիալ հավասարումների ամբողջ լուծումների կարգի գնահատումը

Սույն աշխատանքում ստացված է այսպես կոչված Վիման-Վալիրոնի մաքսիմալ անդամի տեսության ընդհանրացումը և մտցված է ամբողջ ֆունկցիաների S-կարգի հասկացությունը: Այնուհետև այս ընդհանրացումը կիրառված է հանրահաշվական դիֆերենցիալ հավասարումների ամբողջ լուծումների կարգի գնահատման համար:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *G. Valiron*, Bull. des sciences math., v. 47, p. 177—192 (1923). [2] *И. Ф. Битлян, А. А. Гольдберг*, Вестн. Ленинградского ун-та, т. 13, с. 27—41 (1959). [3] *Ш. И. Стрелиц*, Литовский мат. сб. т. 1, II, с. 315—326 (1961). [4] *С. Ц. Саркисян*, в кн.: Некоторые аналоги теорем Вимана—Валирона. Метрические вопросы теории функций. Наукова думка, Киев, 1980.