

УДК 681.322 0:681.3.06

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

С. Р. Вартачов

О соотношении глобально строго сохраняющих и стационарных систем параллельных подстановок

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 14/X 1986 г.)

В работе исследуется свойство глобально строго сохранения (ГСС) в системах параллельных подстановок (СПП) ⁽¹⁾. Рассматривается соотношение определенных классов ГСС и стационарных СПП ^(1,2), в связи с чем вводится отношение эквивалентности, на основе которого получены условия равносильности свойств ГСС и стационарности СПП. В частности, показана существенность свойства взаимнооднозначности функций вторых проекций в определении конфигураций (ср. ⁽¹⁾). Как следствие общих результатов демонстрируется эквивалентность в вводимом смысле классов линейных ГСС и линейных стационарных СПП.

Дадим определение систем параллельных подстановок (ср. ^(1,2)). Пусть A — конечное множество символов (алфавит), M — не более чем счетное множество. $\Phi = \{P_i : \{(a_{ij_1}^1, \varphi_{ij_1}^1)\}_{j_1=(1,k_1^1)} * \{(a_{ij_2}^2, \varphi_{ij_2}^2)\}_{j_2=(1,k_2^2)} \rightarrow \rightarrow \{(a_{ij_3}^3, \varphi_{ij_3}^3)\}_{j_3=(1,k_3^3)}\}_{i=(1,n)}$ называется системой параллельных подстановок, где

1) $\varphi_{ij_t}^t : M \rightarrow M$, $a_{ij_t}^t \in A$ и для любых $x \in M$, j, j' , $j \neq j'$ имеет место $\varphi_{ij}^t(x) \neq \varphi_{ij'}^t(x)$, $t = 1, 2, 3$; $S_{it} = \{(a_{ij_t}^t, \varphi_{ij_t}^t)\}_{j_t=(1,k_t^t)}$ называется конфигурацией, $Pr1(S_{it}) = \{a_{ij_t}^t\}_{j_t=(1,k_t^t)}$ — ее первой проекцией, $Pr2(S_{it}) = \{\varphi_{ij_t}^t\}_{j_t=(1,k_t^t)}$ — второй проекцией, $S_{it}(x) = \{(a_{ij_t}^t, \varphi_{ij_t}^t(x))\}_{j_t=(1,k_t^t)}$, $x \in M$;

2) $\{(a_{ij_1}^1, \varphi_{ij_1}^1)\}_{j_1=(1,k_1^1)} * \{(a_{ij_2}^2, \varphi_{ij_2}^2)\}_{j_2=(1,k_2^2)} = \{(a_{ij_1}^1, \varphi_{ij_1}^1)(a_{ij_2}^2, \varphi_{ij_2}^2)\}_{j_1=(1,k_1^1), j_2=(1,k_2^2)}$ — произведение конфигураций и конфигурация;

3) $W = \{(a_1, x_1)(a_2, x_2) \dots (a_m, x_m)\}$ называется словом, если $x_r \in M$, $r = (1, m)$, $x_p \neq x_l$, $p \neq l$; $K(A, M)$ — множество всех слов над A и M ;

4) $P_i : S_{i1} * S_{i2} \rightarrow S_{i3}$ называется подстановкой, причем если $\varphi_{ij_1}^1 = \lambda x[p_{ij_1}^1]$, $\varphi_{ij_2}^2 = \lambda x[p_{ij_2}^2]$ — λ -обозначение Чёрча, то $\varphi_{ij_3}^3 = \lambda x[p_{ij_3}^3]$ для $j_t = (1, k_t^t)$, $p_{ij_1}^1, p_{ij_2}^2, p_{ij_3}^3$ — константы;

5) пусть задано W' ; если существует $M_i \subseteq M$ такое, что $S_{i1} * S_{i2}(x) \subseteq W'$ для всех $x \in M_i$, то P_i называется выполнимой на W с M_i ;

6) Φ стационарна, если $Pr2(S_{i1}) = Pr2(S_{i3})$ для всех $i = (1, n)$.

Исполнение Φ на входном W осуществляется по следующей итерационной процедуре:

а) если ни одна подстановка P_i не выполнима на слове W_{p-1} —результате $(p-1)$ -ого шага итерации, $W = W_0$, то W_{p-1} —результат вычисления и Φ завершает работу;

б) если P_{i_l} , $l = (1, k)$ —все выполнимые подстановки на W_{p-1} , то $W_p = \Phi(W_{p-1}) = (W_{p-1} \setminus \bigcup_{l=1}^k \bigcup_{x \in M_l} S_{i_l 1}(x)) \cup (\bigcup_{l=1}^k \bigcup_{x \in M_l} S_{i_l 3}(x))$;

в) если $W_p \notin K(A, M)$, то Φ называется противоречивой на W и завершает работу.

Обозначим: $\text{In}(P_i) = \{W : P_i \text{ выполнима на } W\}$ и $\text{In}(\Phi) = \bigcup_{i=1}^n \text{In}(P_i)$.
 $\sigma(\Phi, W) = (W_0, W_1, W_2, \dots)$, где $W = W_0$, $W_p = \Phi(W_{p-1})$ при $p > 0$.

Определение. 1. Φ называется σ_0 -эквивалентной Φ' , если $\text{In}(\Phi) = \text{In}(\Phi')$ и для любого $W \in \text{In}(\Phi)$ имеет место $\sigma(\Phi, W) = \sigma(\Phi', W)$.

2. Φ —ГСС, если для любого $W \in \text{In}(\Phi)$ и произвольного шага итерации выполнено $\text{Pr2}(W_p) = \text{Pr2}(W_{p-1})$.

Из определения следует

Лемма. $\Phi = \{P_i\}_{i=(1,n)}$ —ГСС, если для любого $W \in \text{In}(\Phi)$ и произвольного шага итерации $\text{Pr2}(\bigcup_{l=1}^k \bigcup_{x \in M_l} S_{i_l 1}(x)) \subseteq \text{Pr2}(\bigcup_{l=1}^k \bigcup_{x \in M_l} S_{i_l 3}(x))$ при условии, что $\text{Pr2}(S_{i3}(x)) \subseteq \text{Pr2}(S_{i1} * S_{i2}(x))$ для $\forall (x(x \in M))$, $i = (1, n)$.

Теорема 1. Для любой ГСС Φ существует σ_0 -эквивалентная стационарная Φ' .

Доказательство. Пусть $\Phi = \{P_i : S_{i1} * S_{i2} \rightarrow S_{i3}\}_{i=(1,n)}$ —ГСС. Тогда для каждого $1 \leq i \leq n$ существует набор $X^j \subseteq M$, $j = (1, m_i)$, $\bigcup_{j=1}^{m_i} X^j = M$ такой, что

$$S_{i1} * S_{i2}(X^j) = \begin{cases} S_{i1}^j * S_{i2}^j(Y_1^j) \\ \vdots \\ S_{i k_j^1}^j * S_{i k_j^2}^j(Y_{k_j}^j) \end{cases} \quad (1)$$

Из (1), условий леммы и теоремы следует, что для $1 \leq l \leq |S_{i1}| = k$ $\varphi_l \in \text{Pr2}(S_{i1})$ определяется как

$$\varphi_l(X_r^{jl}) = \psi_r^l(Y_r^{jl}) \quad (2)$$

для $r = (1, q_l)$ и где $\psi_r \in \text{Pr2}(S_{i p_3}^j)$, $1 \leq p \leq k_j$, $X_r^{jl} \subseteq X^j$ в (1). Если $X_s^{jl} \cap \bigcap X_s^{j'l} \neq \emptyset$ для $s \neq s'$, то Φ противоречива для всякого $x \in X_s^{jl} \cap X_s^{j'l}$, если только для (a_s, ψ_s^l) и $(a_{s'}, \psi_{s'}^l)$ выполнено $a_s \neq a_{s'}$. Разобьем область X^j на подобласти по (2) для $l = (1, k)$ и определим в количестве z_j множества

$$\bar{X}_v^j = X_{r_1}^{j1} \cap X_{r_2}^{j2} \cap \dots \cap X_{r_k}^{jk} \neq \emptyset \quad (3)$$

по всевозможным комбинациям номеров $r_1, r_2, \dots, r_k$. Ясно, что $\bigcup_{v=1}^{z_j} \bar{X}_v^j = X^j$. Заметим, что $\bar{X}_v^j$ составлены из аргументов, на которых определена и выполнима до ГСС $\text{Pr2}(S_{i1})$, т. е. $\{\varphi_1(\bar{X}_v^j), \varphi_2(\bar{X}_v^j), \dots, \varphi_k(\bar{X}_v^j)\}$. Кроме того, $\bar{X}_s^j \cap \bar{X}_{s'}^j \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда су-

существуют по крайней мере две области $X_{s_1}^{jl}$ и $X_{s_2}^{jl}$ такие, что $X_{s_1}^{jl} \cap X_{s_2}^{jl} \neq \emptyset$.

Определим функции

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad \zeta_{lv}^1(\bar{X}_v^j) &= \varphi_l(\bar{X}_v^j); \\ \text{б)} \quad \zeta_{lv}^1(M \setminus \bar{X}_v^j) &= \varphi_l(m_{vj}), \end{aligned} \quad (4)$$

если $M \setminus \bar{X}_v^j \neq \emptyset$, в противном случае только а); и где $m_{vj} \in \bar{X}_v^j$ фиксирован произвольным образом для всех $v=(1, z_j)$ и $l=(1, k)$. Тогда $S_{i1} = \{(a_1, \varphi_1)(a_2, \varphi_2) \dots (a_k, a_k)\}$ будут соответствовать $S_{v1}^i = \{(a_1, \zeta_{1v}^1)(a_2, \zeta_{2v}^1) \dots (a_k, \zeta_{kv}^1)\}$. Аналогично, если $\varphi_p \in Pr2(S_{i2})$, $1 \leq p \leq |S_{i2}|$, то определяются $\zeta_{pv}^2(\bar{X}_v^j) = \varphi_p(\bar{X}_v^j)$ и $\zeta_{pv}^2(M \setminus \bar{X}_v^j) = \varphi_p(m_{vj})$. Тогда $S_{j1} * S_{i2}$ соответствуют конфигурации $S_{v1}^i * S_{v2}^i$ в смысле σ_0 -эквивалентности для $v=(1, z_j)$, и определены $P_v^i: S_{v1}^i * S_{v2}^i \rightarrow S_{v3}^i$, где $Pr2(S_{v3}^i) = Pr2(S_{v1}^i)$, а $Pr1(S_{v3}^i)$ образованы в соответствии с (2). Проведя вышеизложенные рассуждения для $i=(1, n)$, мы получим вид стационарной Φ' , удовлетворяющей условию теоремы. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть в определении СПП каждая функция из 1) взаимнооднозначна. Тогда для произвольной ГСС Φ σ_0 -эквивалентная стационарная Φ' существует тогда и только тогда, когда для каждой $\bar{X}_v^j \subseteq M$ из (3) имеет место $|\bar{X}_v^j| = |M|$ при $v=(1, z_j)$, $j=(1, m_i)$.

Необходимость. Пусть существует $\bar{X}_v^j \subset M$ такая, что $|\bar{X}_v^j| < |M|$. Тогда по теореме 1 и принципу Дирихле существуют $x, x', x \neq x'$ и выполнено $\zeta_{lv}(x) = \zeta_{lv}(x')$, где ζ_{lv} определяется по (4), что противоречит условию.

Достаточность. Пусть для любых v, j $|\bar{X}_v^j| = |M|$. Тогда существуют взаимно-однозначные функции

$$f_{vj}: M \rightarrow \bar{X}_v^j. \quad (5)$$

В свою очередь, для каждой $\varphi \in Pr2(S_{i1} * S_{i2})$ (см. (1), (2) и (4)) $\zeta(\bar{X}_v^j) = \varphi(\bar{X}_v^j)$ определяется композицией $\zeta = \varphi(f)$, где f определена по (5) и взаимно-однозначна. Теорема доказана.

Рассмотрим случай, когда каждая φ из 1) линейна (что определяет класс линейных СПП), M — множество целых чисел. По лемме в линейной ГСС Φ $Pr2(S_{i3}) \subseteq Pr2(S_{i1} * S_{i2})$ для $1 \leq i \leq n$.

Теорема 3. Для любой линейной ГСС Φ существует линейная σ_0 -эквивалентная стационарная Φ' .

Доказательство. Из (1) следует, что в (2) $X^j = X_{\tau}^{jl}$ для всех l, τ и, следовательно, в (3) $|\bar{X}_v^j| = |M|$, т. е. по теореме 2 имеет место существование Φ' . Одновременно, по (3) каждое множество из (3) описывается линейной функцией. По теореме 2 в Φ' достаточно определить каждую ζ из (4) в виде композиции линейных функций. Теорема доказана.

Теорема 3 указывает на возможность конструктивных решений при построении Σ_0 -эквивалентных линейных стационарных СПП.

Следствие. *Задача принадлежности произвольной линейной СПП к классу ГСС разрешима.*

Доказательство. Следует из возможности алгоритмического разрешения равенств (1), (2) и множеств (3).

Вычислительный центр Министерства автомобильного транспорта Армянской ССР

Ս. Ռ. ՎԱՐԴԱՆՈՎ

Ձուգանեռ տեղադրութիւնների՝ համընդհանուր խիստ պահպանող համակարգերի և ստացիոնար համակարգերի հաւաքեռութիւն վերաբերյալ

Հոգիւածում դիտարկւում է զուգահեռ ձեւափոխութիւնների համակարգերի ալն հատկութիւնը, որը պահպանում է մուտքային բառի երկարութիւնը և վանդակային տարածութիւն բշիջները՝ ամբողջ հաշվարկի բնթացքում:

Այդ կապակցութիւնը սահմանւում է զուգահեռ տեղադրութիւնների համընդհանուր խիստ պահպանող համակարգերի դաս և դիտարկւում այդ դասի հարաբերութիւնը ստացիոնար համակարգերի դասի հետ: Ցույց է տրւում, որ ալն դեպքում, երբ սահմանափակում ենք կոնֆիգուրացիաների երկրորդ պրոյեկցիաները փոխմիարժեք ֆունկցիաներով, ապա համընդհանուր խիստ պահպանող համակարգերի դասն աւելի լայն է, քան ստացիոնար համակարգերի դասը, իսկ գծային ֆունկցիաների դեպքում՝ նրանք համընկնում են: Նշենք, որ գծային դեպքում ապացույցը կրում է կոնստրուկտիւ բնույթ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Методы параллельного микропрограммирования, Новосибирск, Наука, 1981.
² С. Н. Сергеев, в кн.: Архитектура вычислительных систем с программируемой структурой, Новосибирск, Наука, 1980, (Вычислительные системы; вып. 82). ³ И. М. Виноградов, Основы теории чисел, М., Наука, 1981. ⁴ О. Л. Бандман, Кибернетика, № 2, с. 14—20, 43, 1984.