УДК 510.6:510.25

МАТЕМАТИКА

С. Г. Карагебабян

Субконструктивная логика

(Представлено чл-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 28/II 1987)

В традиционной концепции конструктивной реализуемости ⁽¹⁾ для построения объектов, содержащих в себе информацию о реализуемости логико-арифметических формул, используется достаточно богатый запас алгоритмических средств (например, любые частично-рекурсивные функции). Однако наряду с понятиями вычислимости, основанными на рассмотрении максимально широких классов алгоритмов, существенное значение имеют также и иные понятия вычислимости, где на используемые алгоритмические средства накладываются те или иные ограничения; таково, например, понятие вычислимости с полиномиально ограниченным временем, охватывающее, в соответствии с тезисом Эдмондса ⁽²⁾, любые так называемые «эффективные» или «беспереборные» алгоритмы.

Основной целью дальнейшего изложения является исследование вводимого ниже понятия реализуемости логико-арифметических формул, основанного на рассмотрении более узких классов алгоритмов по сравнению с упомянутым выше понятием С. К. Клини. Оказывается, что при таком рассмотрении получается логическая система, отличающаяся от традиционной конструктивной логики.

Из технических соображений за основу в дальнейшем берется понятие словарной рекурсивной функции ⁽³⁾.

Рассматривается алфавитная нумерация слов в алфавите $\{0, 1\}$ (⁽³⁾, § 11), причем слова и их номера иногда отождествляются. Будем отождествлять иногда словарные функции и представляющие их арифметические функции. Употребляемые ниже функции $\sigma_0(x)$ и $\sigma_1(x)$ — одноместные словарные функции, добавляющие в конце слова x буквы 0 и 1 соответственно.

Определение 1 (ср. ^(3,4)). Если α — n -местная словарная функция, φ и ψ — $(n+2)$ -местные словарные функции, γ — $(n+1)$ -местная словарная функция, то говорим, что $(n+1)$ -местная словарная функция f получается из функций $\alpha, \varphi, \psi, \gamma$ с помощью операции ограниченной словарной рекурсии, если при любых значениях $x_1, \dots, x_n, y$

$$f(x_1, \dots, x_n, 0) = \min(\alpha(x_1, \dots, x_n), \gamma(x_1, \dots, x_n, 0));$$

$$f(x_1, \dots, x_n, \sigma_0(y)) = \min(\varphi(x_1, \dots, x_n, y, f(x_1, \dots, x_n, y)), \gamma(x_1, \dots, x_n, \sigma_0(y)));$$

$$f(x_1, \dots, x_n, \sigma_1(y)) = \min(\psi(x_1, \dots, x_n, y, f(x_1, \dots, x_n, y)), \gamma(x_1, \dots, x_n, \sigma_1(y))).$$

Определение 2. Допустимым классом называется любой класс примитивно-рекурсивных словарных функций, замкнутый относительно операции суперпозиции и операции ограниченной словарной рекурсии, содержащий функции $+$, $-$, sg , $\overline{sg}$, функции, нумерующие пары s , l , r , функции σ_0 и σ_1 и имеющий универсальную словарную рекурсивную функцию.

Говорим, что арифметический предикат P принадлежит допустимому классу Ω , если его характеристическая функция принадлежит Ω .

Допустимыми классами являются, например, класс всех примитивно-рекурсивных функций, классы E^n А. Гжегорчика при $n \geq 2$ ⁽⁶⁾, а также аналогичные классы W^n при $n \geq 2$, основанные на ограниченной словарной рекурсии ⁽⁷⁾.

Заметим, что любой допустимый класс для любого натурального числа n содержит функции, нумерующие n -членные наборы c_n , $c_{1n}, \dots, c_{nn}$ ⁽⁸⁾, §3).

Введем логико-арифметический язык LA_Ω на основе какого-либо фиксированного допустимого класса Ω . В этом языке термы определяются обычным образом (при этом предполагаем, что в языке имеются функциональные символы для всех функций из Ω). Формулы определяются обычным образом на основе предикатных символов для всех предикатов из Ω (в частности, для $=$, $\leq$, $<$), логических символов $\&$, $\vee$, $\supset$, $\neg$, $\forall$, $\exists$ и, кроме того, символов для дополнительно вводимых логических операций $\forall z$ и $\supset_z$, где z — произвольный непустой список различных предметных переменных; порождающие правила для этих операций вводятся следующим образом: если A и B формулы, то $\forall z(A)$ (сокращенно $\forall zA$) и $(A \supset_z B)$ (сокращенно $A \supset_z B$) также формулы. Отметим, что формулы вида $\forall x \forall y A$ и $\forall x y A$ не отождествляются друг с другом.

Понятия свободной и связанной переменной для формул, не имеющих вида $A \supset_z B$ и $\forall z A$, где z — непустой набор различных переменных, определяется обычным образом, а для формул $A \supset_z B$ и $\forall z A$ свободными являются только те переменные, входящие в A или в B (или, соответственно, в A), которые не встречаются в списке переменных набора z .

Через LA обозначим логико-арифметический язык, вводимый так же, как в ⁽¹⁾, но с функциональными и предикатными символами для всех примитивно-рекурсивных функций и предикатов, а также для двухместной общерекурсивной функции, универсальной для класса одноместных примитивно-рекурсивных функций.

Определение 3. Пусть Ω — некоторый допустимый класс, U_Ω — универсальная функция класса Ω . Формула $eR_\Omega A$ языка LA , где A — формула языка LA_Ω , e — переменная, не входящая в A (читается: „натуральное число e реализует формулу A относительно допустимого класса Ω “), определяется индукцией по построению A следующим образом:

- (I) если A — элементарная формула, то $eR_\Omega A$ есть $e=0 \& A$;
- (II) $eR_\Omega (A \& B)$ есть $(l(e)R_\Omega A) \& (r(e)R_\Omega B)$;

- (III) $eR_{\Omega}(A \vee B)$ есть $(l(e)=0 \& r(e)R_{\Omega}A) \vee (l(e)=1 \& r(e)R_{\Omega}B)$;
 (IV) если z —набор (возможно, пустой) переменных $\{x_1, \dots, x_n\}$,
 то $eR_{\Omega}(A \supset_z B)$ есть $\forall x \forall x_1 \dots \forall x_n [xR_{\Omega}A \supset U_{\Omega}(e, c_{n+1}(x, x_1, \dots, x_n))R_{\Omega}B]$;
 (V) $eR_{\Omega}(\neg A)$ есть $eR_{\Omega}(A \supset 1=0)$;
 (VI) если z —непустой набор переменных $\{x_1, \dots, x_n\}$, то $eR_{\Omega}\forall z A$
 есть $\forall x_1 \dots \forall x_n U_{\Omega}(e, c_n(x_1, \dots, x_n))R_{\Omega}A$;
 (VII) если x —переменная, то $eR_{\Omega}\exists x A(x)$ есть $l(e)R_{\Omega}A(r(e))$.

Определение 4. Замкнутая формула A языка LA_{Ω} называется Ω -реализуемой, если существует натуральное число e такое, что формула $eR_{\Omega}A$ реализуема в смысле С. К. Клини (¹). Если z —набор всех свободных переменных формулы A языка LA_{Ω} , то A называется Ω -реализуемой, если Ω —реализуемая формула $\forall z A$; (поскольку существуют различные толкования определения реализуемости по С. К. Клини (^{8,9}), мы принимаем, что каждое толкование этого определения порождает соответствующее толкование введенного здесь определения; для дальнейшего изложения различия в этих толкованиях не будут иметь значения)

Естественным образом вводится язык LP исчисления предикатов с функциональными символами (но без равенства), в котором к обычному списку логических операций добавлены операции вида $\supset_z$ и $\forall z$, где z —любой список попарно различных предметных переменных.

Определим теперь исчисление SC в рассматриваемом логическом языке LP .

Схемы логических аксиом исчисления SC .

- SC1. $A \supset_y A$
 SC2. $(A \& B) \supset_y A$
 SC3. $(A \& B) \supset_y B$
 SC4. $A \supset_y (A \vee B)$
 SC5. $B \supset_y (A \vee B)$
 SC6. $((A \& B) \supset_{zu} C) \supset_y (A \supset_z (B \supset_u C))$
 SC7. $(A \supset_z (B \supset_u (C \supset_v D))) \supset_y ((A \& B) \supset_{zu} (C \supset_v D))$
 SC8. $(A \supset_u (B \supset_v \forall z C)) \supset_y ((A \& B) \supset_{uv} \forall z C)$
 SC9. $((A \supset_z B) \& (B \supset_z C)) \supset_y (A \supset_z C)$
 SC10. $((A \supset_z B) \& (A \supset_z C)) \supset_y (A \supset_z (B \& C))$
 SC11. $((A \supset_z C) \& (B \supset_z C)) \supset_y ((A \vee B) \supset_z C)$
 SC12. $(A \supset_{zu} B) \supset_y \forall z (A \supset_u B)$
 SC13. $((A \& B) \supset_{zu} C) \supset_y ((\forall z A \& \forall z B) \supset_u \forall z C)$
 SC14. $((A \& B) \supset_{xu} C) \supset_y ((A \& \exists x B) \supset_u \exists x C)$
 SC15. $(\forall z A \& (A \supset_z B)) \supset_y \forall z B$
 SC16. $(A \& \forall z B) \supset_y \forall z (A \& B)$
 SC17. $\forall zuvw A \supset_y \forall zvu w A$
 SC18. $\forall zu A \supset_y \forall z \forall u A$
 SC19. $(A(u) \supset_{zu} B(u)) \supset_y (A(t) \supset_z B(t))$
 SC20. $A(t) \supset_y \exists x A(x)$
 SC21. $\forall x (\neg A) \supset_y \neg (\exists x A)$
 SC22. $(A \supset B) \& (A \supset \neg B) \supset_y \neg A$
 SC23. $((\neg A) \& A) \supset_y B$

SC24. $(A \& (B \vee C)) \supset_y ((A \& B) \vee (A \& C))$

SC25. $(A \supset_u B) \supset_y (A \supset_{uz} B)$

SC26. $(A \supset_{zuvw} B) \supset_y (A \supset_{zvuw} B)$

SC27. $\exists x A \supset_y A$

SC28. $A \supset_y \forall z V$

Правила вывода

$$SC29. \frac{\forall z A(z)}{A(t)}$$

$$SC30. \frac{A}{B \supset_z A}$$

$$SC31. \frac{\forall z A, A \supset_z B}{\forall z B}$$

В приведенных схемах логических аксиом и правилах вывода предполагается, что в SC6, SC7 набор u не содержит переменных, входящих свободно в A ; в SC8 набор v не содержит переменных, входящих свободно в A ; в SC14 переменная x не входит в A ; в SC15 множество свободных переменных A и B непусто, z — любой непустой набор свободных переменных A и B ; в SC16 набор z не содержит переменных, входящих свободно в A ; в SC19 t — набор термов ($t = (t_1, \dots, t_m)$), u — набор переменных ($u = (u_1, \dots, u_m)$) и допустима подстановка t_i вместо u_i в формулу $A(u) \supset_z B(u)$ ($i = 1, \dots, m$); в SC20 t — терм; в SC25 набор z не содержит переменных, входящих свободно в A или в B ; в SC27 переменная x не входит свободно в A ; в SC28 набор z не содержит переменных, входящих свободно в A ; в SC29 z — набор всех свободных переменных $A(z)$, t — набор термов, подставляемых на соответствующие места переменных набора z ; в SC31 набор переменных z непуст, если A и B имеют свободные переменные. В остальных схемах A, B, C — произвольные формулы, u, z, u, v, w — произвольные наборы переменных, не имеющие общих элементов.

Понятия вывода и выводимой формулы определяются обычным образом. Подстановка формул языка LA_2 в формулу языка LP вместо элементарных формул, а также допустимость этой подстановки определяются естественным образом.

Теорема 1. Если A — формула, выводимая в SC , Ω — допустимый класс и формула B языка LA_2 получается из A посредством допустимой подстановки формул языка LA_2 вместо элементарных формул, входящих в A , то формула B Ω -реализуема.

Следующая теорема показывает специфику введенного аппарата по сравнению с аппаратом традиционной конструктивной логики.

Пусть Π — класс арифметических функций, вычислимых за полиномиальное время. Ясно, что Π — допустимый класс. Пусть ρ — трехместный предикатный символ в языке LA_{Π} , соответствующий предикату $u^x = z$ (ясно, что этот предикат принадлежит классу Π , несмотря на то, что показательная функция не принадлежит Π).

Предполагаем, что выбрана некоторая „естественная“ универсальная функция U_{Π} для Π (например, на основе машин Тьюринга, так же, как в ⁽¹⁰⁾).

Теорема 2. (I) Формула $\forall x \forall y \exists z \rho(x, y, z)$ Π -реализуема; (II) Формулы $\forall y \forall x \exists z \rho(x, y, z)$ и $\forall x y \exists z \rho(x, y, z)$ не Π -реализуемы.

Метод доказательства. (I) Используя аналог теоремы

XXIII из ⁽¹⁾ (см. ⁽¹⁾, с. 305, а также ^(5,10)), можно показать что существует натуральное число e , такое, что $U_{II}(U_{II}(e, x), y) = C(0, y^x)$. Тогда можно показать, что число e Π -реализует формулу $\forall x \forall y \exists z \rho(x, y, z)$.

(ii) Легко видеть, что не существует натуральных чисел e_1 и e_2 таких, что $U_{II}(U_{II}(e_1, y), x) = C(0, y^x)$; $U_{II}(e_2, C(x, y)) = C(0, y^x)$.

Поэтому формулы $\forall y \forall x \exists z \rho(x, y, z)$ и $\forall x y \exists z. \rho(x, y, z)$ не Π -реализуемы.

Следствие. Формулы $\forall x \forall y P(x, y) \supset \forall y \forall x P(x, y)$ и $\forall x \forall y P(x, y) \supset \forall x y P(x, y)$, где P —двухместный предикатный символ, не выводимы в SC .

Вычислительный центр Академии наук и
Ереванского государственного университета

Ս. Դ. ՂԱՐԱԳԵՐԱԿՅԱՆ

Սուբկոնստրուկտիվ տրամաբանություն

Ուսումնասիրվում է տրամաբանաթվաբանական բանաձևերի իրացնելիությունների գաղափարը, որը նման է Մ. Կ. Կլինիի սահմանմանը, սակայն հիմնված է ալգորիթմների ավելի նեղ դասերի վրա: Կառուցվում է այդպիսի իրացնելիությունների վրա հիմնված տրամաբանական համակարգ, ապացուցվում է այդ համակարգի բովանդակալի անհակասականության թեորեմը և ցույց է տրվում, որ նշված տրամաբանական համակարգը տարրերվում է ախանդական կոնստրուկտիվ տրամաբանությունից: Մասնավորապես, այդ համակարգում չի արտաձվում $\forall x \forall y P(x, y) \supset \forall y \forall x P(x, y)$ բանաձևը, որտեղ P -ն երկու տեղանի պրեդիկատային նշան է:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ С. К. Клини, Введение в метаматематику, ИЛ, М., 1957 ² Р. М. Карп, Кибернетический сб, Нов. сер. вып. 12, Мир, М., 1975 ³ А. И. Мальцев, Алгоритмы и рекурсивные функции, Наука, М., 1986. ⁴ Н. К. Косовский, Зап. науч. семинаров ЛОМН, т. 20, Исследование по конструктивной математике и математической логике, с.60—66 (1971). ⁵ Н. К. Косовский, Зап. науч. семинаров ЛОМН, т. 32, с. 29—34 (1972). ⁶ А. Гжегорчик, Некоторые классы рекурсивных функций, Проблемы математической логики, Мир, М., 1972. ⁷ F. W. Henke, K. Indermark, G. Rose, e. a., Computing, v. 15, №3, p. 217—234 (1975). ⁸ Н. А. Шанин, Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 52, с. 226—311 (1958). ⁹ Н. А. Шанин, К вопросу о конструктивном понимании опорных формул, Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 72, с. 348—379 (1964). ¹⁰ D. J. Monk, Mathematical Logic, Springer verlag, N.—Y.—Heidelberg—Berlin, 1976.