ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXXV 1987 1

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

С. С. Казарян

Некоторые вопросы сходимости и суммируемости в рефлексивных пространствах Орлича

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 25/II 1987)

Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ замкнутая и минимальная система в $L^p(a, b)$ и $\{f_n, g_n\}_{n=1}^{\infty}$ является биортонормированной системой, определенной на интервале (a, b). Пусть $f(x)$ произвольная функция из пространства L^p, тогда частичные суммы разложения функции $f(x)$ по биортонормированной системе $\{f_n, g_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеют вид $\sigma_n(f, x)=\int\limits_a^b f(t)\left|\sum\limits_{k=1}^n f_k(x)g_k(t)\right|dt$.

Возьмем такую функцию $w(x)$, чтобы система $\{w(x)f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ была замкнута и минимальна в $L^p(a, b)$, тогда частичные суммы разложения функции $f(x)$ по биортонормированной системе $\left\{wf_n, \frac{g_n}{w}\right\}$ имеют вид

$$\sigma_{w,n}(f, x)=w(x)\int\limits_a^b \frac{f(t)}{w(t)}\left|\sum_{k=1}^n f_k(x)g_k(t)\right|dt.$$

Если мы рассматриваем вопросы сходимости и суммируемости таких систем в пространствах L^p, то это эквивалентно аналогичным вопросам в весовых пространствах L^p_ω, где $\omega(x)=|w(x)|^p$. Но в пространствах Орлича подобные вопросы не эквивалентны.

Впервые весовые оценки, которые связаны с вопросами сходимости и суммируемости в весовых пространствах L^p_ω, изучались в работах Г. Харди и Д. Литтлвуда ([1]), К. И. Бабенко ([2]). Следует отметить также работу В. Ф. Гапошкина ([3]), который нашел достаточные условия для того, чтобы система $\{w(x)e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ была базисом в $L^2[-\pi, \pi]$. Ю. Чэн ([4]) получил ряд интегральных неравенств, которые имеют важное значение в вопросах сходимости системы $\{w(x)e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ в более широких классах функций, чем пространства L^p, при некоторых условиях, налагаемых на функцию $w(x)$. Однако полная характеристика весов, при которых справедливы некоторые интегральные неравенства в пространствах L^2_ω и L^p_ω, были соответственно даны в работах Х. Хелсона и Г. Сегё ([5]), Б. Макенхаупта ([6]). Отметим также результат А. С. Кранцберга ([7]), который нашел необходимые и достаточные условия, налагаемые на весовую функцию, чтобы система Хаара была базисом в весовых пространствах

L^p_w. Р. Керман и А. Торчинский [8] распространили результат Б. Макенхаупта на классы Орлича. Используя эту работу, Г. Е. Ткебучава [9] получил характеристику весов, при которых системы Хаара, Франклина, Уолша—Пэли являются базисами в весовых рефлексивных пространствах Орлича.

В работе [10] доказана теорема о необходимых и достаточных условиях, налагаемых на $w(x)$, при которых оператор $H_w(f, x) = \sup\limits_{x\in Q} \frac{1}{|Q|}|w(x)| \int\limits_Q \left|\frac{f(t)}{w(t)}\right| dt$, где $Q \subset R^n$ произвольный куб, ограничен в рефлексивном пространстве Орлича. С использованием этой работы в настоящей заметке получены результаты, связанные с суммируемостью и сходимостью систем вида $\{w(x)e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ и $\{w(x)\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, где $\chi_n(x)$ функции системы Хаара в рефлексивных пространствах Орлича.

Отметим, что пространство Орлича L^Φ будет рефлексивным пространством, если функция Юнга $\Phi(s)$ удовлетворяет вместе со своей сопряженной по Юнгу функцией $\Psi(s)$ условию Δ_2.

Следующий результат обобщает теорему Р. Ханта, Б. Макенхаупта и Р. Видена [11]:

Теорема 1. *Пусть* $\bar{f}_w(x) = -\frac{1}{\pi} \cdot w(x) \cdot \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{w(t)} \cdot \frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{(t-x)}{2}} dt.$

Тогда следующие условия эквивалентны:

(а) *Функция* $w(x)$ *принадлежит классу* B_Φ, *т. е. для всех интервалов* $I \subset [-\pi, \pi]$ *и произвольных чисел* $\varepsilon > 0$ $\frac{1}{|I|}\|\chi_I w\|_{L_\varepsilon^\Phi(T)} \cdot \left\|\frac{\chi_I}{\varepsilon w}\right\|_{L_\varepsilon^\Psi(T)} \leqslant D_\Phi$, *где* $T = \{x : -\pi \leqslant x \leqslant \pi\}$.

(б) *Существует некоторая константа* $C_\Phi > 0$ *такая, что для любого* $\varepsilon > 0$

$$\|\bar{f}_w\|_{L_\varepsilon^\Phi(T)} \leqslant C_\Phi \|f\|_{L_\varepsilon^\Phi(T)}.$$

(в) *Существует некоторая константа* $C'_\Phi > 0$ *такая, что*

$$\int\limits_T \Phi(\bar{f}_w(x))dx \leqslant C'_\Phi \int\limits_T \Phi(f(x))dx.$$

На основе этой теоремы и теоремы 1 [10] доказываются следующие теоремы.

Теорема 2. *Пусть* $S_{w,n}(f, x) = \frac{1}{\pi} \cdot w(x) \cdot \int\limits_T \frac{f(t)}{w(t)} \cdot \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)\right]}{2\sin\frac{(t-x)}{2}} dt.$

Тогда следующие условия равносильны:

Фундаментальная библиотека

(а) $w(x)$ *принадлежит классу* B_Φ.

(б) *Существует некоторая константа* $C_\Phi>0$ *такая, что для любого* $\varepsilon>0$

$$\|S_{w,n}(f,x)\|_{L_\varepsilon^\Phi(T)}\leqslant C_\Phi\|f\|_{L_\varepsilon^\Phi(T)}.$$

(в) *Существует некоторая константа* $C'_\Phi>0$ *такая, что*

$$\int\limits_T \Phi(S_{w,n}(f,x))dx\leqslant C'_\Phi\int\limits_T \Phi(f(x))dx.$$

(г) *Имеет место соотношение* $\int\limits_T \Phi(|f(x)-S_{w,n}(f,x)|)dx\to 0$ *при* $n\to\infty$.

Теорема 3. *Пусть* $\overline{S}_{w,n}(f,x)=-\frac{1}{\pi}\cdot w(x)\cdot\int\limits_T\frac{f(t)}{w(t)}\cdot$

$$\cdot\frac{\cos\frac{(t-x)}{2}-\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)\right]}{2\sin\frac{(t-x)}{2}}dt.$$

Тогда следующие условия равносильны:

(а) $w(x)$ *принадлежит классу* B_Φ.

(б) *Существует некоторая константа* $C_\Phi>0$ *такая, что для любого* $\varepsilon>0$

$$\|\overline{S}_{w,n}(f,x)\|_{L_\varepsilon^\Phi(T)}\leqslant C_\Phi\|f\|_{L_\varepsilon^\Phi(T)}.$$

(в) *Существует некоторая константа* $C'_\Phi>0$ *такая, что*

$$\int\limits_T \Phi(\overline{S}_{w,n}(f,x))dx\leqslant C'_\Phi\int\limits_T \Phi(f(x))dx.$$

(г) *Выполняется соотношение* $\int\limits_T \Phi(|\overline{f}_w(x)-\overline{S}_{w,n}(f,x)|)dx\to 0$ *при* $n\to\infty$.

Из теоремы 1 ([10]) следует также справедливость следующих теорем.

Теорема 4. *Пусть* $\sigma^\delta_{w,n}(f,x)=\frac{1}{\pi}w(x)\int\limits_T\frac{f(t)}{w(t)}K^\delta_n(t-x)dt$, *где* $K^\delta_n(t)$ *ядро метода суммирования Чезаро порядка* δ. *Тогда следующие условия эквивалентны:*

(а) $w(x)$ *принадлежит классу* B_Φ.

(б) $\sigma^\delta_{w,n}(f,x)$ $(\delta>0)$ *удовлетворяет условию* $\|\sigma^\delta_{w,n}(f,x)\|_{L_\varepsilon^\Phi(T)}\leqslant C_\Phi\|f\|_{L_\varepsilon^\Phi(T)}$, *где* $C_\Phi>0$ *не зависит от* n *и функции* $f(x)$.

(в) *Существует некоторая константа* $C'_\Phi>0$ *такая, что*

$$\int\limits_T \Phi(\sigma^\delta_{w,n}(f,x))dx\leqslant C'_\Phi\int \Phi(f(x))dx.$$

(г) *Выполняется соотношение* $\int\limits_{T} \Phi(|f(x)-\sigma^{0}_{w,n}(f,x)|)dx \to 0$ *при* $n\to\infty$.

Теорема 5. *Пусть* $f_w(r,x)=\frac{1}{\pi}w(x)\int\limits_{T}\frac{f(t)}{w(t)}P(r,t-x)dt$, *где* $P(r,t-x)$ *ядро Пуассона. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(а) $w(x)$ *принадлежит классу* B_Φ.

(б) $f_w(r,x)$ $(0\leqslant r<1)$ *удовлетворяет условию* $\|f_w(r,x)\|_{L^{\Phi}_{\varepsilon}(T)}\leqslant C_\Phi\|f\|_{L^{\Phi}_{\varepsilon}(T)}$, *где* $C_\Phi>0$ *не зависит от* r *и функции* $f(x)$.

(в) *Существует некоторая константа* $C'_\Phi>0$ *такая, что*

$$\int\limits_{T}\Phi(f_w(r,x))dx\leqslant C'_\Phi\int\limits_{T}\Phi(f(x))dx.$$

(г) *Имеет место соотношение* $\int\limits_{T}\Phi(|f(x)-f_w(r,x)|)dx\to 0$ *при* $r\to 1$.

Из теоремы 2 работы ([10]) следует теорема, которая является обобщением результата А. С. Кранцберга ([7]).

Теорема 6. *Пусть* $T_{w,n}(f,x)=\frac{1}{|\Delta_n|}w(x)\int\limits_{\Delta_n}\frac{f(t)}{w(t)}dt$, *при* $x\in\Delta_n$, *где* $\Delta_n\in I_{\text{дв}}$. $I_{\text{дв}}$ — *совокупность всех двоичных интервалов вида* $\left(\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}\right)$ $(1\leqslant k\leqslant 2^n;\ n=0,1,\ldots)$ *на отрезке* $[0,1]$. *Тогда следующие условия равносильны:*

(а) $w(x)$ *принадлежит классу* B^{*}_Φ, *т. е. для всех интервалов* $\Delta\in I_{\text{дв}}$ *и произвольных чисел* $\varepsilon>0$ $\frac{1}{|\Delta|}\|\chi_\Delta w\|_{L^{\Phi}_{\varepsilon}}\cdot\left\|\frac{\chi_\Delta}{\varepsilon w}\right\|_{L^{\Psi}_{\varepsilon}}\leqslant D_\Phi$.

(б) $T_{w,n}(f,x)$ *удовлетворяет условию* $\|T_{w,n}(f,x)\|_{L^{\Phi}_{\varepsilon}(0,1)}\leqslant C_\Phi\|f\|_{L^{\Phi}_{\varepsilon}(0,1)}$, *где* $C_\Phi>0$ *не зависит от* n *и функции* $f(x)$.

(в) *Существует некоторая константа* $C'_\Phi>0$ *такая, что*

$$\int\limits_0^1\Phi(T_{w,n}(f,x))dx\leqslant C'_\Phi\int\limits_0^1\Phi(f(x))dx.$$

(г) *Выполняется соотношение* $\int\limits_0^1\Phi(|f(x)-T_{w,n}(f,x)|)dx\to 0$ *при* $n\to\infty$.

В работе Ю. Чэна ([3]) функция $\Phi(s)$, фигурирующая в интегральных неравенствах, принадлежит классам $Z(a,b)$ и $M(a,b)$, которые являются более широкими, чем классы Орлича, в которых функция Юнга удовлетворяет Δ_2 условию. Однако в отличие от результатов, излагаемых в данной статье, где рассматриваются подобные интегральные неравенства, в работе Ю. Чэна условия, налагаемые на функцию $w(x)$, являются только необходимыми. Поэтому теоремы, изложенные в данной статье, можно считать в некотором смысле развитием результатов Ю. Чэна.

В заключение выражаю благодарность чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляну за ценное обсуждение результатов настоящей работы.

Институт геофизики и инженерной сейсмологии
Академии наук Армянской ССР

Ս. Ս. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

Զուգամիտության և գումարման մեթոդների որոշ հարցեր Օրլիչի ռեֆլեքսիվ տարածություններում

Մեր կողմից $w(x)$ ֆունկցիայի վրա դրվել են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, որոնց դեպքում որոշ տիպի օպերատորների համար.

$$\sigma_{w,n}(f, x) = w(x) \cdot \int_a^b \frac{f(t)}{w(t)} \left[\sum_{k=1}^{n} f_k(x) g_k(t) \right] dt$$

ստացվել են հետևյալ տիպի ինտեգրալ անհավասարություններ.

$$\int_a^b \Phi(\sigma_{w,n}(f, x))dx \leqslant C_\Phi \int_a^b \Phi(f(x))dx:$$

Ստացված անհավասարությունները հնարավորություն են տվել ուսումնասիրել եռանկյունաչափական և Հաարի սիստեմների զուգամիտության որոշ հարցեր Օրլիչի ռեֆլեքսիվ տարածություններում։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *G. H. Hardy, I. E. Littlewood,* Acta Math., v. 54 (1930). [2] *К. И. Бабенко,* ДАН СССР, т. 62 (1948). [3] *В. Ф. Гапошкин,* Мат. сб., т. 46 (1958). [4] *Y. Chen,* Math. Ann., v. 140 (1960). [5] *H. Helson, G. Szegö,* Ann. Math. Pura ed appl., v. 51 (1960). [6] *B. Muckenhoupt,* Trans. Amer. Math. Soc., v. 155 (1972). [7] *А. С. Кранцберг,* Тр. МИЭМ, вып. 24 (1971). [8] *R. Kerman, A. Tochinsky,* Studia Math., v. 71 (1982). [9] *Г. Е. Ткебучава,* Сообщ. АН ГССР, т. 121, №3 (1986). [10] *С. С. Казарян,* Изв. АН АрмССР. Математика, т. 22 №4 (1987). [11] *R. Hunt, B. Muckenhoupt, R. Wheeden,* Trans. Amer. Math. Soc. v. 176 (1973).