

УДК 519.214

МАТЕМАТИКА

Б. С. Нахапетян, А. Н. Петросян

Центральная предельная теорема для мартингалов, ассоциированных с последовательностями возрастающих множеств

(Представлено академиком АН Армянской ССР Р. В. Амбарцумяном 13/II 1987)

Пусть Z^v — целочисленная решетка ($v \geq 1$) и $W(Z^v)$ — множество ее конечных подмножеств. Мы скажем, что случайный процесс S_V , $V \in W(Z^v)$ образует мартингал, ассоциированный с последовательностью возрастающих множеств $V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n \subset \dots$; $V_i \in W(Z^v)$; $i = 1, 2, \dots$, если почти всюду выполняются следующие соотношения:

$$E(S_{V_n} / S_{V_1}, S_{V_2}, \dots, S_{V_{n-1}}) = S_{V_{n-1}}; \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Имеется много примеров случайных процессов S_V , $V \in W(Z^v)$, обладающих этим свойством. Пусть ξ_t , $t \in Z^v$ — случайное поле с независимыми компонентами и $E\xi_t = 0$, $t \in Z^v$. Тогда совокупность $S_V = \sum_{t \in V} \xi_t$, $V \in W(Z^v)$ образует мартингал, ассоциированный с любой последовательностью возрастающих множеств из $W(Z^v)$. Пусть случайное поле ξ_t , $t \in Z^v$, таково, что ξ_t и ξ_s независимы при $t \in \Delta_j$, $s \in \Delta_k$, $k \neq j$, $\Delta_j = V_j \setminus V_{j-1}$. Тогда последовательность $S_{V_n} = \sum_{t \in V_n} \xi_t$, $n = 1, 2, \dots$ обладает свойством (1). Этим же свойством обладает совокупность

$$S_{V_n} = \sum_{t \in V_n} \xi_t - \sum_{j=1}^n \sum_{t \in \Delta_j} E(\xi_t / S_{\Delta_{k-1}}, 1 \leq k \leq j); \quad n = 1, 2, \dots; \quad S_{\Delta_0} = 0,$$

построенная по некоторому случайному полю ξ_t , $t \in Z^v$, $E|\xi_t| < \infty$, $t \in Z^v$.

Пусть ξ_t , $t \in Z^v$, случайное поле со значениями в некотором метрическом пространстве X с σ -конечной мерой μ на его борелевских подмножествах.

Пусть конечномерные распределения этого случайного поля обладают строго положительными плотностями $p_V(x_t, t \in V)$, $V \in W(Z^v)$ относительно мер $\mu^{|V|}$, $(x_t, t \in V) \in X^{|V|}$, соответственно, где $|\cdot|$ — число точек в конечном множестве.

Тогда, если $q_V(x_t, t \in V)$, $V \in W(Z^v)$ — некоторая другая система совместных плотностей, то величины

$$S_V = \frac{q_V(\xi_t, t \in V)}{p_V(\xi_t, t \in X)}, \quad V \in W(Z^v)$$

образуют мартингал относительно любой последовательности конечных возрастающих подмножеств решетки Z^v .

Другие примеры мартингалов рассматриваемого вида можно строить следующим образом. Пусть $Z^\gamma = \bigcup_{j=1}^{\infty} T_j$, $T_j \cap T_k = \emptyset$, $j \neq k$; $k, j = 1, 2, \dots$ и пусть случайное поле ξ_t , $t \in Z^\gamma$, таково, что совокупность $S_V = \sum_{t \in V} \xi_t$, $V \subset T_j$, $|V| < \infty$, при каждом j образует мартингал относительно любой последовательности возрастающих конечных множеств из T_j , а величины S_V и $S_{\tilde{V}}$ независимы при $V \subset T_j$, $\tilde{V} \subset T_k$, $k \neq j$. Тогда совокупность S_V , $V \in \mathcal{W}(Z^\gamma)$ образует мартингал относительно любой возрастающей последовательности конечных подмножеств решетки Z^γ . Интересно также указать условия на потенциал, при которых совокупность $S_V = \sum_{t \in V} \xi_t$, $V \in \mathcal{W}(Z^\gamma)$, где ξ_t , $t \in Z^\gamma$, — гиббсовское случайное поле, обладает свойством (1).

В настоящей работе нас будут интересовать условия справедливости центральной предельной теоремы для мартингалов указанного вида (1).

Всюду далее мы будем рассматривать последовательности возрастающих множеств V_n , $n = 1, 2, \dots$, такие, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\max_{1 \leq j \leq n} |\Delta_j|}{|V_n|} = 0,$$

которые будем называть регулярными последовательностями.

Следствием известных результатов Брауна ⁽¹⁾ и Дворецкого ⁽²⁾ по ц. п. т. для мартингалов является следующий результат.

Теорема 1. Пусть S_{V_n} , $n = 1, 2, \dots$, мартингал, ассоциированный с некоторой регулярной последовательностью V_n , $n = 1, 2, \dots$, и выполнены следующие условия:

$$1) DS_{\Delta_j} \geq \sigma^2 |\Delta_j|, \sigma^2 > 0, E|S_{\Delta_j}|^{2+\delta} \leq C|\Delta_j|^{1+\frac{\delta}{2}}, 0 < C < \infty, \delta > 0;$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} (DS_{V_n})^{-1} \sum_{j=1}^n \text{cov}(S_{\Delta_j}^2, \text{sgn} I_j) = 0,$$

$$I_j = E(S_{\Delta_j}^2 | S_{\Delta_1}, \dots, S_{\Delta_{j-1}}) - ES_{\Delta_j}^2, j = 1, 2, \dots$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P((DS_{V_n})^{-\frac{1}{2}}(S_{V_n} - ES_{V_n}) < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, x \in R^1,$$

т. е. справедлива ц. п. т.

Проверке такого типа условий хорошо поддаются мартингалы S_{V_n} , $n = 1, 2, \dots$, являющиеся одновременно суммами слабо зависимых случайных величин. Данный факт проиллюстрирован в работе Дворецкого ⁽²⁾ на примере частичных сумм компонент случайных процессов. Отметим также известную теорему Ибрагимова—Биллингсли о том, что частичные суммы стационарной последовательности мартингал-разностей, имеющих второй момент, асимптотически нормальны, если сама последовательность эргодична (см. ^(3,4)).

Учитывая вышесказанное мы ограничимся рассмотрением мартингалов вида (1), которые являются суммами компонент некоторого случайного слабозависимого поля. Наше решение указанного выше вопроса фактически приводит к ослаблению известных достаточных условий справедливости ц. п. т. для случайных полей при наличии у них частичных сумм дополнительно мартингальной структуры относительно некоторой системы возрастающих множеств.

Нас будут интересовать случайные поля ξ_t , $t \in Z^v$, удовлетворяющие условиям слабой зависимости типа сильного перемешивания (с. п.). Под этим понимается, что величина $\alpha(\mathfrak{M}_I, \mathfrak{M}_V) = \sup\{|P(AB) - P(A)P(B)|; A \in \mathfrak{M}_I, B \in \mathfrak{M}_V\}$ мала, когда σ -алгебры $\mathfrak{M}_I = \sigma(\xi_t, t \in I)$, $\mathfrak{M}_V = \sigma(\xi_t, t \in V)$, $I, V \in W(Z^v)$, достаточно удалены в том или ином смысле.

Мы будем использовать следующие коэффициенты перемешивания:

$$\alpha(r) = \sup\{\alpha(\mathfrak{M}_I, \mathfrak{M}_V); I, V \in W(Z^v); \rho(I, V) \geq r\};$$

$$\rho(I, V) = \inf_{s \in I, t \in V} \rho(s, t); \rho(s, t) = \max_{1 \leq i \leq v} |s^{(i)} - t^{(i)}|;$$

$$\alpha(r, d) = \sup\{\alpha(\mathfrak{M}_I, \mathfrak{M}_V); I, V \in W(Z^v); \rho(I, V) \geq r; D(I) \geq d, D(V) \geq d\}$$

где $D(\cdot)$ — диаметр множества,

$$\alpha_{m,n}(r) = \sup_{m,n \in N \cup \{1\}} \{\alpha(\mathfrak{M}_I, \mathfrak{M}_V); I, V \in W(Z^v); \rho(I, V) \geq r, |I| \leq m, |V| \leq n\}$$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 2. Пусть случайное поле ξ_t , $t \in Z^v$, $E\xi_t = 0$ таково, что $\alpha(r) \rightarrow 0$, $r \rightarrow \infty$, $\sum_{j=1}^{\infty} j^{v-1} \alpha_{m,n}^{-1}(j) < \infty$, $m+n=4$ и $|\xi_t| < C < \infty$ с вероятностью 1.

Тогда, если частичные суммы $S_{V_n} = \sum_{t \in V_n} \xi_t$ для некоторой регулярной последовательности прямоугольников V_n , $n=1, 2, \dots$, $V_n \in W(Z^v)$ образуют мартингал и $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{DS_{V_n}}{|V_n|} = \sigma_0^2 > 0$, то эта последовательность асимптотически нормальна.

Отметим, что теорема 2 остается справедливой и для полей, удовлетворяющих следующему критерию: $\alpha(d, r) \leq \frac{d^k \beta(r)}{r}$, $k > 0$, $\beta(r) > 0$.

Комментируя условия теоремы 2, отметим, что в отличие от известных достаточных условий справедливости ц. п. т. для случайных полей с с. п. (см. например (5-7)) здесь фактически не накладывается условий на скорость стремления к нулю коэффициента перемешивания $\alpha(r)$.

Теорема 3. Пусть случайное поле ξ_t , $t \in Z^v$, $E\xi_t = 0$, удовлетворяет условию с. п. с коэффициентом $\alpha_{\infty,n}(r) \leq n^k \alpha(r)$, $k > 0$, $\sum_{j=1}^{\infty} j^{v-1} \alpha_{m,n}^{-1}(j) < \infty$ и $|\xi_t| \leq C$, $t \in Z^v$.

Тогда, если частичные суммы $S_{V_n} = \sum_{t \in V_n} \xi_t$ образуют мартингал

относительно регулярной последовательности $V_i \in W(Z^v)$, $i=1, 2, \dots$, стремящийся к бесконечности.

$$u \quad \frac{\sum_{j=1}^n |\Delta_j|^{\frac{k}{2}+1} \alpha^{\frac{1}{2}}(V_{j-1}, \Delta_j)}{\sum_{j=1}^n |\Delta_j|} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

то последовательность S_{V_n} асимптотически нормальна.

Здесь мы видим, что для рассматриваемого в теореме 3 критерия перемешивания ц. п. т. имеет место, например, в случае, когда приращения $|\Delta_j| \leq C < \infty$ и одновременно они удаляются друг от друга при $n \rightarrow \infty$.

Отметим также, что представляется возможным в приведенных теоремах заменить условие равномерной ограниченности компонент случайного поля менее обременительными условиями: равномерной интегрируемости семейства $\{|\xi_t|^{2+\delta}, t \in Z^v\}$ и $E|\xi_t|^{2+\delta} < C < \infty, t \in Z^v$.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Բ. Ս. ՆԱՀԱՊԵՏՅԱՆ, Ա. Ն. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

Կենտրոնական սահմանային թեորեմն անող բազմությունների հետ
շաղկապված մարտինգալների համար

Դիցուք Z^v -ն ամբողջարժեք վանդակն է ($v \geq 1$) և $W(Z^v)$ -ն նրա վերջավոր բազմությունների դասն է: Կասենք, որ $S_{V_n}, V \in W(Z^v)$ պատահական պրոցեսը կազմում է մարտինգալ՝ շաղկապված անող բազմությունների հաջորդականության հետ, եթե հ.ա. տեղի ունեն

$$E(S_{V_n}/S_{V_1}, \dots, S_{V_{n-1}}) = S_{V_{n-1}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Աշխատանքում տեղ են դրել (1) հատկությամբ օժտված պրոցեսների մի քանի օրինակներ: Դրանք կարող են ստացվել նաև որպես որոշակի պոտենցիալով օժտված Դիբրսյան դաշտի կոմպոնենտների (ըստ համապատասխան բազմությունների) գումարներ:

Աշխատանքում ներկայացված են կենտրոնական սահմանային թեորեմներ (1) տիպի մարտինգալների համար, որոնք հանդիսանում են ուժեղ խառնուրդով օժտված թույլ կախյալ պատահական դաշտերի կոմպոնենտների գումարներ:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ B. M. Brawn, Ann Math. Statist., v. 42 (1971). ² A. Dvoretzky, Proc. Six h. Berkeley Symp. Math. Stat. Prob., v. 11 (1972). ³ И. А. Ибрагимов, Теория вероятностей и ее применения, т. 8, вып. 1 (1963). ⁴ R. Billingsley, Proc. Amer. Math. Soc., v. 12, 5 (1961). ⁵ В. В. Городецкий, ДАН СССР, т. 276, № 4 (1984). ⁶ А. В. Булинский, И. Г. Журбенко, Теория вер. и ее прим., т. 21, вып. 1 (1976). ⁷ А. В. Булинский, И. Г. Журбенко, ДАН СССР, т. 226, № 1 (1976).