ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXV 1987 1

УДК 517.537

МАТЕМАТИКА

Ф. А. Шамоян

Диагональное отображение и вопросы представления в анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 12/I 1987)

1. Пусть U—единичный круг на комплексной плоскости, $H(U)$—множество всех голоморфных в U функций. В работах М. М. Джрбашяна ([1,2]) были введены следующие классы функций:

$$H^p(\alpha)=\left\{f\in H(U):\|f\|^p_{H^p(\alpha)}=\int_U|f(\zeta)|(1-|\zeta|)^\alpha dm_2(\zeta)<+\infty\right\},$$

dm_2—плоская мера Лебега на U. Для этих классов было установлено интегральное представление

$$f(z)=\frac{\alpha+1}{\pi}\int_U\frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha f(\zeta)dm_2(\zeta)}{(1-\bar\zeta z)^{\alpha+2}},\quad z\in U,\ (p\geq 1). \tag{1}$$

В этой заметке мы исследуем анизотропные пространства голоморфных в единичном полидиске $U^n=U\times U\times\ldots\times U$ функций типа пространств $H^p(\alpha)$, при этом для получения результатов существенно используются ядра $D_\alpha(\zeta, z)=\dfrac{(1-|\zeta|^2)^\alpha}{(1-\bar\zeta z)^{\alpha+2}}$ и их многомерные аналоги. С целью изложения основных результатов заметки введем также следующие обозначения: символом S обозначим множество неотрицательных функций из $L^1(0, 1)$, для которых $\alpha_\omega=\sup\limits_{x\in(0,1)}\left|\dfrac{\omega'(x)x}{\omega(x)}\right|<+\infty$. Если $\omega_j\in S$, $1\leq j\leq n$ и $\zeta=(\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n)$, то запись $\omega(1-|\zeta|)$ означает произведение $\prod\limits_1^n\omega_j(1-|\zeta_j|)$, если $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\in Z^n$, то, как обычно, $\zeta^\alpha=\zeta_1^{\alpha_1}\ldots\zeta_n^{\alpha_n}$, $|E|$ означает лебегову меру измеримого множества E.

В дальнейшем через $H(U^n)$ мы обозначим множество всех голоморфных в U^n функций. Пусть $\omega_j\in S$, $1\leq j\leq n$, $0<p<+\infty$, положим

$$H^p(\omega_1,\ldots\omega_n)=\left\{f\in H(U^n):\|f\|^p_{H^p(\omega_1,\ldots,\omega_n)}=\int_{U^n}|f(\zeta)|^p\omega(1-|\zeta|)dm_{2n}(\zeta)<+\infty\right\},$$

dm_{2n}—$2n$-мерная мера Лебега. Через $L^p(\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n)$ обозначим соответствующее весовое L^p-пространство. Легко видеть, что при $p\geq 1$ пространство $H^p(\omega_1, \ldots \omega_n)$ относительно вышеуказанной нормы является банаховым, а при $0<p<1$ можно в $H^p(\omega_1, \ldots \omega_n)$ ввести естественную метрику $\rho(f, g)=\|f-g\|^p_{H^p(\omega_1,\dots,\omega_n)}$, относительно которой указанное пространство превращается в локально ограниченное F-пространство (см. [3]). В этой заметке мы изучим следы функций из классов $H^p(\omega_1, \dots \omega_n)$ на диагонали полидиска U_n, найдем параметрическое представление этих классов и получим полную характеристику линейных непрерывных функционалов на этих пространствах.

2. *Диагональное отображение в пространствах* $H^p(\omega_1, \dots \omega_n)$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $0<p<+\infty$, $\omega_j\in S$, $1\leq j\leq n$, $\Lambda_n(t)=\prod\limits_{j=1}^n\omega_j(t)\cdot t^{2n-2}$, $t\in(0, 1)$. *Если* $f\in H^p(\omega_1, \dots \omega_n)$, *то функция* $\varphi(z)=D(f)(z)=f(z, z, \dots z)$, $z\in U^n$ *принадлежит классу* $H^p(\Lambda_n)$, *при этом* $\|f\|_{H^p(\Lambda_n)}\leq C\|f\|_{H^p(\omega_1,\dots,\omega_n)}$. *И обратно, для каждой* $\varphi\in H^p(\Lambda_n)$ *можно построить функцию* $f\in H^p(\omega_1, \dots \omega_n)$ *такую, что* $D(f)(z)=\varphi(z)$, $z\in U$, *т. е.* $DH^p(\omega_1, \dots \omega_n)=H^p(\Lambda_n)$, $0<p<+\infty$.

Замечание. *Аналог теоремы* 1 *в случае пространств Харди* $H^p(U^n)$, $0<p<+\infty$ *был установлен в работах* [4,5], *а в случае* $\omega_j(t)=t^{\alpha_j}$, $1\leq j\leq n$ *в* [6].

Доказательство теоремы основано на следующих вспомогательных утверждениях.

Лемма 1. *Пусть* $\omega_j\in S$, $\alpha=(\alpha_1, \dots \alpha_n)$, $\alpha_j>\alpha_{\omega_j}$, $1\leq j\leq n$, $1<p<+\infty$, *тогда оператор* $T_\alpha(f)(z)=\int\limits_{U^n}\frac{f(\zeta)\omega(1-|\zeta|)}{(1-\bar{\zeta}z)^{\alpha+2}}dm_{2n}(\zeta)$, $z\in U^n$, *действует из* $L^p(\omega_1, \dots \omega_n)$ *в* $H^p(\omega_{\alpha_1}, \dots \omega_{\alpha_n})$, *где*

$$\omega_{\alpha_j}(t)=\omega_j(t)\left(\frac{t^{\alpha_j}}{\omega_j(t)}\right)^p,\quad t\in(0, 1). \tag{2}$$

Обозначим

$$k=(k_1, \dots k_n)\in Z^n_+,\quad l_1=(l_1, l_2, \dots l_n)\in Z^n,\quad -2^{k_j}\leq l_j\leq 2^{k_j}-1,\quad j=1, \dots, n. \tag{3}$$

Положим

$$\Delta_{k_j, l_j}=\left\{z_j\in U: 1-\frac{1}{2^{k_j}}<|z_j|\leq 1-\frac{1}{2^{k_j+1}},\ \frac{\pi l_j}{2^{k_j}}<\arg z_j\leq\frac{\pi(l_j+1)}{2^{k_j}}\right\},$$

$$\Delta_{k,l}=\Delta_{k_1,l_1}\times\dots\times\Delta_{k_n,l_n} \tag{4}$$

Лемма 2. *Пусть* $V\in C(U)$ *и существует положительное число A такое, что при* $z\in U^n$ *выполняется оценка*

$$|V(z)|\leq\frac{A}{|U^n_\rho(z)|}\int\limits_{U^n_\rho}|V(\zeta)|dm_{2n}(\zeta), \tag{5}$$

где $U^n_\rho(z)$ *полидиск с центром в точке* $z\in U^n$ *радиуса* $\rho: (U^n_\rho\subset U^n)$. *Тогда*

$$\sum_{|k|=0}^{+\infty}\sum_{l_1=-2^{k_1}}^{2^{k_1}-1}\dots\sum_{l_n=-2^{k_n}}^{2^{k_n}-1}\left\{\max_{\zeta\in\bar{\Delta}_{k,l}}|V(\zeta)|\omega_1(|\Delta_{k_1,l_1}|^{\frac{1}{2}})\dots\omega_n(|\Delta_{k_n,l_n}|^{\frac{1}{2}})|\Delta_{k,l}|\right\}\leq c\|V\|_{L^1(\omega_1,\dots,\omega_n)}.$$

3. *Параметрическое представление классов* $H^p(\omega_1, \ldots \omega_n)$.

Пусть $\alpha=(\alpha_1, \ldots \alpha_n)$, $(\alpha_j>-1)$, $1\leq j\leq n$, $z=(z_1, \ldots z_n)$, $\zeta=(\zeta_1, \ldots \zeta_n)$. Обозначим через $D(\zeta, z)$ многомерное ядро Джрбашяна

$$D_\alpha(\zeta, z)=\prod_{j=1}^{n} D_{\alpha_j}(\zeta_j, z_j).$$

Теорема 2. *Пусть* $\omega_j\in S$, $\alpha_j\geq\alpha_{\omega_j}$ *при* $1<p<+\infty$ *и* $\alpha_j>\alpha_{\omega_j}$ *при* $p=1$, $1\leq j\leq n$. *Тогда класс* $H^p(\omega_1, \ldots \omega_n)$ *совпадает с классом функций* f, *допускающих представление*

$$f(z)=\int_{U^n} D_\alpha(\zeta, z)g(\zeta)\omega(1-|\zeta|)dm_2(\zeta),\quad z\in U^n,\quad g\in L^p(\omega_1, \ldots \omega_n).$$

При этом $\|f\|_{H^p(\omega_1\ldots\omega_n)}\leq c\|g\|_{L^p(\omega_1\ldots\omega_n)}$.

Отметим, что в случае единичного шара в C^n, когда $\omega_j(t)\equiv1$, $1\leq j\leq n$, аналог этой теоремы можно вывести из результатов работы ([1]). Имеет место соответствующее утверждение и при $0<p<1$, а при $p=1$ справедливо также другое представление.

Теорема 3. *Пусть* $\omega_j\in S$, $\alpha=(\alpha_1, \ldots \alpha_n)$, $\alpha_j>\dfrac{\alpha_{\omega_j}+2}{p}$, $1\leq j\leq n$, $0<p\leq1$. *Тогда следующие утверждения равносильны.*

1) $f\in H^p(\omega_1, \ldots \omega_n)$; 2) f *допускает представление*

$$f(z)=\int_{U^n} D_\alpha(\zeta, z)d\mu(\zeta),\quad z\in U^n, \tag{6}$$

где μ — *комплекснозначная борелевская мера на* U^n, *для которой*

$$\sum_{|k|=0}^{+\infty}\sum_{l_1=-2^{k_1}}^{2^{k_1}-1}\ldots\sum_{l_n=-2^{k_n}}^{2^{k_n}-1}\left\{|\mu(\Delta_{k,l})|\,|\Delta_{k,l}|^{1-p}\omega_1(|\Delta_{k_1,l_1}|^{\frac{1}{2}})\ldots\omega_n(|\Delta_{k_n,l_n}|^{\frac{1}{2}})\right\}<+\infty.$$

Из теорем 2, 3 и леммы 2 непосредственно следует.

Теорема 4. *Пусть* $u(z_1, \ldots z_n)$ n-*гармоническая функция в* U^n *и пусть* $\omega_j\in S$, $1\leq j\leq n$, $0<p<+\infty$. *Если* $\int_{U^n}|u(\zeta)|^p\omega(1-|\zeta|)dm_{2n}(\zeta)<+\infty$, *то при* $\alpha_j>\dfrac{\alpha_{\omega_j}+2}{p}$, $1\leq j\leq n$, *функция* $f(z)=\int_{U^n}D_\alpha(\zeta, z)u(\zeta)dm_{2n}(\zeta)$, $z\in U^n$, *удовлетворяет неравенству*

$$\int_{U^n}|f(\zeta)|^p\omega(1-|\zeta|)dm_{2n}(\zeta)\leq C\int_{U^n}|u(\zeta)|^p\omega(1-|\zeta|)dm_{2n}(\zeta).$$

Следствие. *Пусть* $\omega_j\in S$ *и* $f(0, 0, \ldots, 0)=0$, $f\in H(U^n)$ *Тогда имеет место оценка* $\int_{U^n}|f(\zeta)|^p\omega(1-|\zeta|)dm_{2n}(\zeta)\leq C\int_{U^n}|\mathrm{Re}\, f(\zeta)|^p\,\omega(1-|\zeta|)\,dm_{2n}(\zeta)$, $0<p<+\infty$.

Доказательство этого утверждения $(n=1)$ основанное на молекулярном представлении классов $H^p(\alpha)$, приведено в ([8]), а при $\omega(t) = t^\alpha$, $\alpha > -1$, доказательство, основанное на представлении (1), установлено в ([6]).

4. *Представление линейных непрерывных функционалов в пространствах* $H^p(\omega_1, \dots \omega_n)$, $(0 < p < +\infty)$.

Здесь мы опишем $(H^p(\omega_1, \dots \omega_n))^*$ при всех $p \in (0, +\infty)$. С этой целью сначала введем операторы D^α, $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_n)$, $\alpha_j > -1$, $1 \leq j \leq n$. Наше определение незначительно отличается от обычных определений операторов указанного типа (см. ([9])). Пусть $f \in H(U^n)$ и $f(z) = \sum_{|k|=0}^{+\infty} a_k z^k$ $z \in U^n$, положим

$$D^\alpha f(z) \overset{\text{def}}{=} \sum_{|k|=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+1)} a_k z^k, \quad z \in U^n.$$

Здесь
$$\frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+1)} = \prod_1^n \frac{\Gamma(\alpha_j+k_j+1)}{\Gamma(\alpha_j+1)\Gamma(k_j+1)}.$$

Ясно, что $D^\alpha f \in H(U^n)$. Определим функцию

$$l_z(\zeta) = \frac{1}{1-\zeta z} = \frac{1}{(1-\zeta_1 z_1) \dots (1-\zeta_n z_n)}, \quad \zeta = (\zeta_1, \dots \zeta_n), \quad z = (z_1 \dots z_n) \in U^n. \tag{7}$$

Теорема 5. *Пусть* Φ — *линейный непрерывный функционал на* $H^p(\omega_1, \dots \omega_n)$, $1 < p < +\infty$ *и* $g(z) = \Phi(l_z)$. *Тогда*

1) (а) $g \in H(U^n)$ и $D^{\alpha+1} g \in H^q(\omega_{\alpha_1}, \dots \omega_{\alpha_n})$, $\alpha_j > \alpha_{\omega_j}$, $1 \leq j \leq n$, $q = \frac{p}{p-1}$, *где* $\omega_{*_j}(t) \overset{\text{def}}{=} \omega_j(t) \left(\frac{t^{\alpha_j}}{\omega_j(t)} \right)^q$, $t \in (0, 1)$, $1 \leq j \leq n$.

(б) *Функционал* Φ *представим в виде*

$$\Phi(f) = \lim_{\rho \to 1-0} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} f(\rho\zeta) \overline{g(\rho\zeta)}\, dm_n(\zeta). \tag{8}$$

Здесь T^n *остов полидиска* U^n, *кроме того, справедливы оценки*

$$c_1(\alpha, p) \|D^{\alpha+1} g\|_{H^q(\omega_{\alpha_1} \dots \omega_{\alpha_n})} \leq \|\Phi\| \leq C_2(\alpha, p) \|D^{\alpha+1} g\|_{H^q(\omega_{\alpha_1} \dots \omega_{\alpha_n})} \tag{9}$$

2) *И обратно, для любой функции* g, $D^{\alpha+1} g \in H^q(\omega_{\alpha_1}, \dots \omega_{\alpha_n})$, $(\alpha_j > \alpha_{\omega_j}, 1 \leq j \leq n)$ *формула* (8) *порождает линейный непрерывный функционал на* $H^p(\omega_1, \dots, \omega_n)$, *для которого справедливы оценки* (9).

Теперь рассмотрим случай $0 < p \leq 1$. Пусть $\omega_j \in S$, $1 \leq j \leq n$. Обозначим через $\Lambda^p_{\omega_1, \dots, \omega_n}$ класс функций $g \in H(U^n)$, для которых

$$\|g\|_{\Lambda^p_{\omega_1 \dots \omega_n}} = \sup_{z \in U^n} \left\{ \frac{|D^{\alpha+1} g(z)| (1-|z|)^{\alpha+2\frac{(p-1)}{p}}}{\omega(1-|z|)} \right\} < +\infty, \quad \left(\alpha_j > \frac{\alpha_{\omega_j}+2}{p}, \ 1 \leq j \leq n \right).$$

Пусть $\Phi \in H^p(\omega_1 \dots \omega_n)^*$ $0 < p \leq 1$, поскольку $H^p(\omega_1, \dots, \omega_n)$ являются локально ограниченными F-пространствами, то непрерывность Φ эквивалентна ограниченности величины

$$\|\Phi\| = \sup_{\|f\|_{H^p(\omega_1 \dots \omega_n)} \leq 1} |\Phi(f)| < +\infty,$$

(см. ([3])).

Теорема 6. *Пусть* Φ — *линейный непрерывный функционал на* $H^p(\omega_1, \ldots \omega_n)$ *и* $0<p\leqslant 1$, $g(z)=\Phi(l_z)$, $z\in U^n$. *Тогда*

1) (а) $g\in\Lambda^p_{\omega_1\ldots\omega_n}$; (б) Φ *представим в виде*

$$\Phi(f)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{T^n} f(\rho\zeta)g(\rho\bar{\zeta})dm_n(\zeta). \tag{10}$$

При этом существуют константы $C_1(p, \alpha)$, $C_2(p, \alpha)$ *такие, что*

$$C_1(p, \alpha)\|g\|_{\Lambda^p_{\omega_1\ldots\omega_n}}\leqslant\|\Phi\|\leqslant C_2(p, \alpha)\|g\|_{\Lambda^p_{\omega_1\ldots\omega_n}}. \tag{11}$$

2) *И обратно, каждая функция* $g\in\Lambda^p_{\omega_1,\ldots,\omega_n}$ *по* (10) *порождает функционал* $\Phi\in H^p(\omega_1, \ldots, \omega_n)^*$, *для которого справедливы оценки* (11).

Замечание. *В том случае, когда* $\omega_j(t)=(1-t)^\beta$, $1\leqslant j\leqslant n$, $\beta>-1$, *в* ([8]) *получено другое представление функционалов на* $H^p(\omega_1, \ldots \omega_n)$, $0<p\leqslant 1$, *в виде суммы некоторого ряда; в анизотропном случае указанное там доказательство не проходит.*

Доказательство теорем 5 и 6 основано на параметрическом представлении классов $H^p(\omega_1, \ldots \omega_n)$ (теоремы 2, 3).

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Ֆ. Ա. ՇԱՄՈՅԱՆ

Անկյունագծային արտապատկերում և անիզոտրոպ տարածություններում պոլիդիսկում հոլոմորֆ ֆունկցիաների ներկայացման որոշ հարցեր

Աշխատանքում ստացված է $H^p(\omega_1, \ldots \omega_n)$ *տարածությունների վրա գծային անընդհատ ֆունկցիոնալների լրիվ բնութագրումը և այդ տարածություններին պատկանող ֆունկցիաների հետքերի նկարագրումը պոլիդիսկի անկյունագծի վրա։ Բացի այդ օգտագործելով Մ. Մ. Ջրբաշյանի կորիզների հատկությունները, աշխատանքում կառուցվում է վերոհիշյալ դասերի պարամետրական տեսքը։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. М. Джрбашян*, ДАН АрмССР, т. 3, № 1 (1945). [2] *М. М. Джрбашян*, Сообщ. Ин-та математики и механики АН АрмССР, вып. 2 (1948). [3] *У. Рудин*, Функциональный анализ, М., Мир, 1975. [4] *Ф. А. Шамоян*, ДАН АрмССР, т. 62, № 1 (1976). [5] *Ф. А. Шамоян*, Мат. сб., т. 107, № 3 (1978). [6] *Ф. А. Шамоян*, ДАН СССР, т. 261, № 3 (1978). [7] *F. Forelli, W. Rudin*, Indiana univ Math. J., v. 24, p 296—321 (1974). [8] *R. Coifman, R. Rochberg*, Asterisgue, № 7, p. 11—66 (1980). [9] *М. М. Джрбашян*, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., Наука, 1966.