ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXIV 1987 5

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. Н. Акопян

О передаче нагрузки от неоднородной полубесконечной накладки к упругой полуплоскости

Рассмотрена контактная задача, когда упругая полуплоскость по своей границе усилена неоднородной частного типа полубесконечной накладкой. Случай однородной накладки рассмотрен в известной работе Койтера [1] и в других работах, приведенных в [2]. Общий случай неоднородности накладки рассмотрен в монографии [3], где задача сведена к интегральному уравнению Фредгольма, разрешаемому методом последовательных приближений.

В настоящей работе методом, описанным в [1], построено замкнутое решение указанной задачи в частном случае, когда модуль упругости накладки по ее длине изменяется по степенному закону.

1. Пусть упругая полуплоскость, находящаяся в обобщенном плоском напряженном состоянии, с модулем упругости E_2 и коэффициентом Пуассона ν_2 по своей границе $y=0$ усилена неоднородной полубесконечной накладкой малой высоты h с упругими характеристиками ν_1 и $E_s(x)$, загруженной на своем конце сосредоточенной силой. Предполагается, как и в работах [1, 3], что накладка рассматривается как одномерный упругий континуум.

Требуется определить закон распределения касательных контактных напряжений под накладкой, коэффициент их интенсивности на ее конце, а также закон распределения осевых напряжений в ней, когда модуль ее упругости изменяется по степенному закону.

Решение сформулированной задачи сводится к решению следующего интегродифференциального уравнения [3]:

$$-\frac{2}{\pi E_2}\int_0^\infty \frac{\tau_-(u)du}{u-x}+\frac{1}{A_s E_s(x)}\left[d\int_0^x \tau_-(u)du-p\right]=0, \qquad (1.1)$$

$$(0<x<\infty)$$

где $\tau_-(x)$ — неизвестные контактные напряжения, A_s — площадь поперечного сечения накладки, d — ее ширина, а $E_s(x)=E_1\cdot E(x)$.

Поскольку осевые деформации накладки на бесконечности исчезают, то придем к условию

$$d\int_0^\infty \tau_-(u)du=p. \qquad (1.2)$$

Далее, следуя работам ([1,3]), введем безразмерные величины

$$x=\frac{E_1A_s}{E_2d}\xi;\quad u=\frac{E_1A_s}{E_2d}\eta;\quad \tau_-=\frac{E_2p}{E_1A_s}\tau;\quad \lambda^*(\xi)=E^{-1}\left(\frac{E_1A_s}{E_2d}\xi\right),$$

после чего уравнение (1.1) примет вид

$$-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\tau(\eta)}{\eta-\xi}\,d\eta+\lambda^*(\xi)\left[\int\limits_0^\xi \tau(\xi)d\xi-1\right]=0;\quad (0<\xi<\infty), \tag{1.3}$$

а условие (1.2) — вид

$$\int\limits_0^\infty \tau(\eta)d\eta=1 \tag{1.4}$$

2. В дальнейшем положим $\lambda^*(\xi)=\xi^{-\alpha}(-1<\alpha<1/2)$. Тогда замкнутое решение уравнения (1.3) при условии (1.4), как в ([1]), можно построить при помощи интегрального преобразования Меллина. С этой целью введем в рассмотрение это преобразование:

$$T_0(s)=\int\limits_0^\infty \tau(\xi)\xi^{s-1}d\xi,$$

и в соответствии с ним обе части уравнения (1.3) умножим на ξ^{s-1} и проинтегрируем от $\xi=0$ до $\xi=\infty$. После некоторых операций, используя результаты ([1]), получим следующее разностное функциональное уравнение:

$$T_0(s+1-\alpha)+2(s-\alpha)\operatorname{ctg}\pi s\, T_0(s)=0, \tag{2.1}$$

которое, согласно (1.4), должно рассматриваться при условии

$$T_0(1)=1. \tag{2.2}$$

Для обоснования указанных операций, приводящих к уравнению (2.1), на функцию $\tau(x)$ должны быть наложены известные ограничения ([1]), которые полностью укладываются в общую рамку предположений, принятых в плоской теории упругости ([4]).

На основании этих предположений можно показать, что уравнение (2.1) имеет место в полосе регулярности $0<b<\operatorname{Re}s<1$. Как и в ([1]), легко доказать, что функция $T_0(s)$ регулярна в более широкой полосе $b<\operatorname{Re}s<2-\alpha$.

Приступим к решению (2.1). С этой целью положим

$$T_0(s)=2[2(1-\alpha)]^{(s-1)/(1-\alpha)}\Gamma\left(\frac{s-\alpha}{1-\alpha}\right)\{\sin[\pi s/2(1-\alpha)]\}^{-1}Y(s). \tag{2.3}$$

Тогда (2.1) преобразуется в уравнение

$$Y(s+1-\alpha)+\operatorname{ctg}[\pi s/2(1-\alpha)]\operatorname{ctg}\pi s\, Y(s)=0, \tag{2.4}$$

а условие (2.2) — в условие

$$Y(1)=\frac{1}{2}\sin[\pi/2(1-\alpha)]. \tag{2.5}$$

Теперь введем логарифмическую производную от функции $Y(s)$, т. е. обозначим $X(s)=Y'(s)/Y(s)$. Тогда уравнение (2.4) сводится к следующему разностному уравнению с постоянными коэффициентами:

$$X(s+1-\alpha)-X(s)=-2\pi\left\{\frac{1}{\sin 2\pi s}+\frac{1}{2(1-\alpha)\sin[\pi s/(1-\alpha)]}\right\}, \tag{2.6}$$

которое имеет место в полосе регулярности $b<\operatorname{Re}s<1-\alpha$.

Замкнутое решение (2.6) строится при помощи двустороннего преобразования Лапласа и имеет вид

$$X(s)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{(1-\alpha)w}}{e^{(1-\alpha)w}-1}F(w)e^{-sw}\,dw \tag{2.7}$$

$$F(w)=2\pi i\left[\frac{e^{w}}{1+e^{w/2}}-\frac{e^{(1-\alpha)w}}{1-e^{(1-\alpha)w}}\right];\quad (b<\operatorname{Re}s<1-\alpha).$$

Далее, определяя функцию $Y(s)$ и используя (2.5), для $T_0(s)$ получим следующее выражение:

$$T_0(s)=[2(1-\alpha)]^{\frac{s-1}{1-\alpha}}\Gamma\left(\frac{s-\alpha}{1-\alpha}\right)\frac{\sin[\pi/2(1-\alpha)]}{\sin[\pi s/2(1-\alpha)]}\exp\left[\int_1^s X(s)\,ds\right], \tag{2.8}$$

После чего легко определить контактные напряжения по формуле обратного преобразования Меллина

$$\tau(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}T_0(s)x^{-s}ds;\quad (0<b<c<2-\alpha). \tag{2.9}$$

Отметим, что в общем случае определить функцию $X(s)$ в явном виде не удается. Но во многих частных случаях показателя α легко можно определить эту функцию и получить для контактных напряжений довольно простые расчетные формулы. А именно, при $\alpha=1/4$, $-1/2$ для функций $X(s)$, $T_0(s)$ и $\tau(x)$, соответственно, получаются следующие простые выражения:

$$X(s)=\pi\left\{\frac{1}{\sin 2\pi s}-\frac{1}{\cos 2\pi s}+\frac{2}{3\sin(4\pi s/3)}+\frac{4\cos(4\pi s/3)}{\sin 4\pi s}\right\};$$

$$T_0(s)=-(3/2)^{4(s-1)/3-1/2}\frac{\Gamma(4s/3-1/3)\sin(4\pi s/3)}{\cos\pi s\,\sin\pi(1/4-s)};$$

$$\tau(x)=\frac{2}{\sqrt{6}}\left\{\sqrt{2/x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{3k}}{(3/2)^{(4k+2/3)}\Gamma(4k+2/3)}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{3k+2}}{(3/2)^{4(k+1)-3/2}(4k+3)!}-\right.$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{3k-1/4}}{(3/2)^{4k-1/2}(4k)!}-\frac{2\sqrt{2}}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{3k+1/4}}{(3/2)^{4k+2/3}\Gamma(4k+5/3)}+\quad(0<x<\infty)$$

$$+\frac{9}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{4}{3\sqrt{6}}(1-\ln(2/3))-\frac{3}{2}\ln x+\psi(4k+2)+\frac{2\pi}{\sqrt{6}}+\frac{\pi}{9\sqrt{2}}\right]\times$$

$$\times\frac{x^{3k+1/2}}{(3/2)^{4k+3}(4k+1)!}+\frac{3}{2\sqrt{6}\,\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{\pi}{\sqrt{3}}+\frac{3}{2}\left(\frac{4}{3}\ln(2/3)+\ln x\right)-\right.$$

$$-2\psi(4k+3)\Big]\frac{x^{3k+5/4}}{(3/2)^{4k+3}(4k+2)!}\Big\};\quad X(s)=\frac{2\pi}{3}\,\frac{2+3\cos(2\pi s/3)+\cos(4\pi s/3)}{\sin 2\pi s};$$

$$T_0(s)=-\frac{2}{\sqrt{3}}(3)^{2(s-1)/3}\Gamma(2s/3-1/3)\frac{\sin(2\pi s/3)}{\cos\pi s};$$

$$\tau(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{3k-1/2}}{3^{2k+5/6}\,\Gamma(2k+1/3)}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(-1)^k x^{3k-1}}{3^{2k-1/2}(2k-1)!}+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{3k+1/2}}{3^{2k+3/2}(2k)!}+\frac{2\ln 3-\pi/2-2\ln x}{24\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{3k+1/2}}{3^{2k}(2k)!}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\psi(2k+1)}{3^{2k+1}(2k)!}x^{3k+1/2},\qquad (0<x<\infty)$$

где $\psi(x)$ — известная пси-функция Эйлера.

В случае же $\alpha=1/2$ из (2.3) сразу находим

$$T_0(s)=-2\Gamma(2s-1)/\cos\pi s,$$

а для контактных напряжений будем иметь

$$\tau(x)=\frac{2}{\pi\sqrt{x}}\left\{\frac{\pi}{2}\sin(\sqrt{x})-\cos(\sqrt{x})\ln x+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2(-1)^k\psi(2k+1)}{(2k)!}x^k\right\}.\quad (0<x<\infty)$$

Автор выражает благодарность С. М. Мхитаряну за обсуждение работы и ценные указания.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Վ. Ն. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

Առաձգական կիսահարթության անհամասեռ կիսաանվերջ վերադիրից ուժի փոխանցման մասին

Դիտարկված է առաձգական կիսահարթության և անհամասեռ կիսաանվերջ վերադիրի կոնտակտային փոխազդեցության խնդիրը, երբ վերադիրի առաձգական մոդուլը փոխվում է աստիճանային օրենքով։

Օգտվելով Մելինի ձևափոխությունից խնդրի բնութագրիչ ինտեգրոդիֆերենցիալ հավասարումը բերված է տարբերության ֆունկցիոնալ հավասարման և կառուցված է այդ հավասարման փակ լուծումը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 *W. T. Koiter*, The Quart. Journ. Mach. and Appl. Math., v. VIII, pt. 1, p. 164—178 (1955). 2 Развитие теории контактных задач в СССР, М., Наука, 1976. 3 *В. М. Александров, С. М. Мхитарян*, Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками, М., Наука, 1983. 4 *Н. И. Мусхелишвили*, Некоторые основные задачи математической теории упругости, М., Наука, 1973.