

УДК 551.2

ГЕОМЕХАНИКА

Л. С. Казарян

# Устойчивость земной литосферы за пределами упругости

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Т. Асланяном 5/II 1987)

Модель литосферной плиты, потерявшей первоначальную форму, имитируется с механической точки зрения моделью пластинки на упругом основании, которая теряет устойчивость в упругопластической зоне.

В настоящей работе на основе деформационной теории пластичности исследуется устойчивость пластины на упругом основании, нагруженной со всех сторон.

В качестве механических соотношений принимаются уравнения деформационной теории пластичности несжимаемого тела <sup>(1)</sup>:

$$\sigma - \frac{1}{2} \sigma_y = \frac{\sigma_i}{l_i} l_x; \quad \sigma_y = \frac{1}{2} \sigma_x = \frac{\sigma_i}{l_i} l_y; \quad \tau_{xy} = \frac{\sigma_i}{3l_i} l_{xy}, \quad (1)$$

где  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $l_x$ ,  $l_y$ ,  $l_{xy}$  являются компонентами напряжений и деформаций, через которые определяются соответствующие интенсивности:

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2};$$

$$l_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{l_x^2 + l_x l_y + l_y^2 + \frac{1}{4} l_{xy}^2}. \quad (2)$$

Далее предполагается, что у пластинки начальное напряженное состояние — плоское.

При выпучивании напряжения в пластинке получают бесконечно малые приращения  $\delta\sigma_x$ ,  $\delta\sigma_y$ ,  $\delta\sigma_{xy}$ . Принимая гипотезу непрерывного нагружения <sup>(2)</sup>, согласно которой искривление пластинки происходит в условиях возрастания нагрузки, и исходя из (1) для вариаций  $\delta\sigma_x$ ,  $\delta\sigma_y$  и  $\delta\tau_{xy}$  получим <sup>(3)</sup>:

$$\begin{aligned} \delta\sigma_x &= a_{11} \delta l_x + a_{12} \delta l_y + a_{13} \delta l_{xy}; \\ \delta\sigma_y &= a_{21} \delta l_x + a_{22} \delta l_y + a_{23} \delta l_{xy}; \\ \delta\tau_{xy} &= a_{31} \delta l_x + a_{32} \delta l_y + a_{33} \delta l_{xy}, \end{aligned} \quad (3)$$

в которых

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{4}{9l_i} \left[ 3\sigma_i + (2l_x + l_y)^2 \frac{d}{dl_i} \left( \frac{\sigma_i}{l_i} \right) \right]; \\ a_{12} &= \frac{2}{9l_i} \left[ 3\sigma_i + 2(2l_x + l_y)(2l_y + l_x) \frac{d}{dl_i} \left( \frac{\sigma_i}{l_i} \right) \right]; \end{aligned} \quad (4)$$

$$a_{13} = \frac{2}{9l_i} l_{xy}(2l_x + l_y) \frac{d}{dl_i} \left( \frac{\sigma_i}{l_i} \right); \quad a_{22} = \frac{4}{9l_i} \left[ 3\sigma_i + (2l_y + l_x) \frac{d}{dl_i} \left( \frac{\sigma_i}{l_i} \right) \right];$$

$$a_{23} = \frac{2}{9l_i} l_{xy}(2l_y + l_x) \frac{d}{dl_i} \left( \frac{\sigma_i}{l_i} \right); \quad a_{33} = \frac{1}{9l_i} \left[ 3\sigma_i + l_{xy}^2 \frac{d}{dl_i} \left( \frac{\sigma_i}{l_i} \right) \right]; \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Используя формулы Коши для вариаций, имеем

$$\delta l_x = \frac{\partial \delta u_x}{\partial x}; \quad \delta l_y = \frac{\partial \delta u_y}{\partial y}; \quad \delta l_{xy} = \frac{\partial \delta u_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta u_y}{\partial x}, \quad (5)$$

где

$$\delta u_x = -z \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \delta u_y = -z \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (6)$$

и преобразуя (5), получим

$$\delta l_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \delta l_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \delta l_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Внеся значения деформаций, выраженных через перемещения, из (6) в (3), получаем приращения напряжений

$$\delta \sigma_x = -z \left( a_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2a_{13} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right);$$

$$\delta \sigma_y = -z \left( a_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2a_{23} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right); \quad (7)$$

$$\delta \tau_{xy} = -z \left( a_{13} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_{23} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2a_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right),$$

а приращения изгибающих моментов определяются по формулам

$$\delta M_x = \int_{-h/2}^{h/2} z \delta \sigma_x dz; \quad \delta M_y = \int_{-h/2}^{h/2} z \delta \sigma_y dz; \quad \delta H = \int_{-h/2}^{h/2} z \delta \tau_{xy} dz. \quad (8)$$

Уравнения равновесия дифференциального элемента пластинки после выпучивания имеют вид (4)

$$\frac{\partial \delta M_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta H}{\partial y} = N_1; \quad \frac{\partial \delta M_y}{\partial y} + \frac{\partial \delta H}{\partial x} = N_2 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \delta N_1}{\partial x} + \frac{\partial \delta N_2}{\partial y} + T_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \bar{q}. \quad (10)$$

При расчете поперечно-нагруженной пластинки, покоящейся на упругом основании, кроме действующей нагрузки, необходимо учитывать силы реакции, передающиеся от основания к пластинке.

Интенсивность реакции основания эквивалентна силе плавучести, возникающей в результате замещения слоя мантийной породы толщины  $w$  коровой породой, и равна  $kw$ . Исходя из изостатических законов под  $k$  понимается умножение разности плотностей слоев на ускорение  $g[k = g(\rho_m - \rho_c)]$  (5), и следовательно, поверхностная нагрузка, действующая на континентальную литосферу,  $\bar{q} = q - kw$ .

Подстановкой (9) в (10) получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 \delta M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \delta H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \delta M_y}{\partial y^2} + T_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = q - kw. \quad (11)$$

Значения начальных тангенциальных сил берутся в виде

$$T_x = -h\sigma_x; \quad T_y = -h\sigma_y; \quad S = -h\tau_{xy}. \quad (12)$$

Далее, подставляя значения изгибающих моментов из (8), а начальные тангенциальные силы из (12) в уравнение (11) и считая, что поверхностная нагрузка отсутствует, дифференциальное уравнение равновесия после некоторых упрощений и группировок можно привести к виду

$$\frac{h^3}{12} \left[ a_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + a_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2(a_{12} + 2a_{33}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4a_{13} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 4a_{23} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} \right] - h\sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2h\tau_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - h\sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + kw = 0. \quad (13)$$

Рассматривается задача об устойчивости шарнирно-опертой по контуру пластинки, сжатой в своей плоскости по направлению  $x$  и  $y$  давлениями  $p$  и  $cp$  соответственно.

Ограничиваясь случаем линейного упрочнения материала <sup>(1)</sup>, т. е.

$$\sigma_i = E[(1-\lambda)l_i + \lambda l_s]; \quad \lambda = 1 - \frac{1}{E} \frac{d\sigma_i}{dl_i} = \text{const}, \quad (14)$$

где  $E$ —модуль упругости (Юнга),  $l_s$ —предел упругих деформаций материала, и полагая  $\sigma_x = -p$ ,  $\sigma_y = -cp$ ,  $\tau_{xy} = 0$ , с использованием (1), (2) и (14), получаем

$$\sigma_s = \chi p_s; \quad l_i = \frac{\chi p - \lambda p_s}{E(1-\lambda)}; \quad \chi = \sqrt{1-c+c^2}; \quad p_s = El_s. \quad (15)$$

Из (4) с учетом (15) для коэффициентов  $a_{ij}$  получаем выражения <sup>(3)</sup>

$$a_{11} = A \frac{4\chi^3 p - 3\lambda p_s}{\chi p - \lambda p_s}; \quad a_{12} = A \frac{2\chi^3 p - 3c\lambda p_s}{\chi p - \lambda p_s}; \quad a_{22} = A \frac{4\chi^3 p - 3c\lambda p_s}{\chi p - \lambda p_s};$$

$$a_{33} = A \frac{\chi^3 p}{\chi p - \lambda p_s}; \quad a_{13} = a_{23} = 0; \quad A = \frac{E(1-\lambda)}{3\chi^2}; \quad \frac{l_i}{\sigma_i} = \frac{1}{3a_{33}}. \quad (16)$$

Для уравнения (13) с учетом (15) и граничных условий шарнирного опирания пластинки  $w(x, 0) = w(x, b) = \frac{\partial^2 w(x, 0)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w(x, b)}{\partial y^2} = 0$ ;

$$w(0, y) = w(a, y) = \frac{\partial^2 w(0, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w(a, y)}{\partial x^2} = 0 \quad (17)$$

решение ищется в виде

$$w(x, y) = B \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b}, \quad (18)$$

где  $m, n$  — целые числа, определяющие число полуволн искривленной пластинки. Подставляя значения  $a_{ij}$  из (16) и решение (18) в уравнение (17) и преобразуя, получим

$$p^2 - D_1 p + D_2 = 0. \quad (19)$$

В квадратном уравнении (19) введены следующие обозначения:

$$D_1 = \frac{Ah^2\chi^2\alpha^2}{3\beta} + \frac{\lambda p_s}{\chi} + \frac{k}{h\beta}; \quad D_2 = \frac{Ah^2\lambda p_s\beta}{4\chi} + \frac{k\lambda p_s}{\chi h\beta},$$

$$\alpha = \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2; \quad \beta = \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + c\left(\frac{\pi n}{b}\right)^2. \quad (20)$$

Полагая в (20)  $c=0$ ;  $\chi=1$  и переходя к пределу при  $b \rightarrow \infty$ , получаем выражения коэффициентов  $D_1$  и  $D_2$  для шарнирно-опертой бесконечной полосы, сжатой давлением

$$D_1 = \frac{Ah^2\pi^2 m^2}{3a^2} + \lambda p_s + \frac{ka^2}{h\pi^2 m^2};$$

$$D_2 = \frac{Ah^2\pi^2 \lambda p_s m^2}{4a^2} + \frac{k\lambda p_s a^2}{h\pi^2 m^2}.$$

Таким образом, зная значения  $D_1$  и  $D_2$ , по формуле

$$p_{1,2} = \frac{D_1 \pm \sqrt{D_1^2 - 4D_2}}{2} \quad (21)$$

определяем критические значения напряжений  $p_{кр}$ .

В работе мы принимаем, что

$$\sigma_{il/p=p_e} = \chi p_e > \sigma_s = El_s, \quad (22)$$

т. е. литосферная плита теряет устойчивость за пределами упругости. Для данного случая с учетом (22) и (15) получим

$$p_{кр} > \frac{\sigma_s}{\chi} > \frac{\lambda p_s}{\chi}. \quad (23)$$

Расчеты показали, что только для большого корня

$$p_1 = \frac{D_1 + \sqrt{D_1^2 - 4D_2}}{2}$$

удовлетворяется условие (23), поэтому критические значения берем равными  $p_{кр} = p_1$ .

В таблице приведены значения критических напряжений для различных значений  $\lambda$ ,  $c$ ,  $M$ ,  $b = Ma$  при  $m = n = 1$ . Сравнивая полученные результаты с результатами работы (6), приходим к заключению, что литосферная плита может терять устойчивость в упругопластическом состоянии при  $\lambda > 0,9$ , когда напряжения находятся в допустимых, в смысле прочности, пределах, установленных экспериментальным путем.

Из полученных результатов сделаны следующие выводы:

1. Наличие упругого основания приводит к повышению критических напряжений.

# Значения критических напряжений

( $h/a=1/6$ ;  $h=0,7 \cdot 10^5$  м;  $E/\sigma_s=0,36(6) \cdot 10^3$ ;  $\sigma_s=2,7 \cdot 10^3$  кг/см<sup>2</sup>  $\approx 2,7 \cdot 10^8$  Па)

| c   | M=b/a | $\lambda=0,0$ | $\lambda=0,5$ | $\lambda=0,9$ | $\lambda=0,99$ |                                                                                               |
|-----|-------|---------------|---------------|---------------|----------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|
|     |       | p/ $\sigma_s$ | p/ $\sigma_s$ | p/ $\sigma_s$ | p/ $\sigma_s$  |                                                                                               |
| 0,5 | 1     | 55,11         | 33,74         | 7,18          | 1,52           | kh/ $\sigma_s=0$                                                                              |
| 1   | 1     | 50,22         | 25,22         | 5,25          | 1,17           |                                                                                               |
| 2   | 1     | 33,48         | 16,85         | 3,59          | 0,767          |                                                                                               |
| 1   | 2     | 31,85         | 15,81         | 3,47          | 1,08           |                                                                                               |
| 2   | 2     | 26,148        | 13,25         | 2,97          | 0,76           |                                                                                               |
| 0,5 | 1     | 68,25         | 35,03         | 8,4           | 2,27           | kh/ $\sigma_s=1,2$                                                                            |
| 1   | 1     | 51,18         | 26,18         | 6,21          | 1,66           |                                                                                               |
| 2   | 1     | 34,11         | 17,48         | 4,22          | 1,43           |                                                                                               |
| 1   | 2     | 32,96         | 18,11         | 4,88          | 1,95           |                                                                                               |
| 2   | 2     | 27,44         | 14,55         | 4,14          | 1,65           |                                                                                               |
| 0,5 | 1     | 60,85         | 31,01         | 7,13          | 1,758          | h=0,37 · 10 <sup>5</sup> м;<br>E/ $\sigma_s$ =0,329 · 10 <sup>3</sup><br>kh/ $\sigma_s$ =0,6  |
| 1   | 1     | 45,64         | 23,19         | 5,25          | 1,306          |                                                                                               |
| 2   | 1     | 30,42         | 15,5          | 3,56          | 0,878          |                                                                                               |
| 1   | 2     | 29,01         | 15,02         | 3,83          | 1,304          |                                                                                               |
| 2   | 2     | 24,17         | 12,6          | 3,3           | 1,073          |                                                                                               |
| 1   | 3     | 22,22         | 11,88         | 3,56          | 1,64           | h=0,7 · 10 <sup>5</sup> м;<br>kh/ $\sigma_s$ =0,93;<br>E/ $\sigma_s$ =0,274 · 10 <sup>3</sup> |
| 1   | 5     | 20,98         | 11,31         | 3,57          | 1,71           |                                                                                               |
| 1   | 7     | 20,64         | 11,17         | 3,55          | 1,96           |                                                                                               |
| 2   | 3     | 20,2          | 10,88         | 3,53          | 1,505          |                                                                                               |
| 2   | 5     | 20,2          | 10,97         | 3,557         | 1,66           |                                                                                               |
| 2   | 7     | 20,22         | 9,25          | 3,42          | 1,71           |                                                                                               |
| 3   | 1     | 19,15         | 9,87          | 2,42          | 0,805          |                                                                                               |
| 3   | 2     | 17,62         | 9,38          | 2,81          | 1,097          |                                                                                               |

2. С увеличением пластических свойств материала (с возрастом параметра  $\lambda$ ) критические напряжения убывают. Когда материал приближается к идеально пластическому ( $\lambda$  стремится к единице), критические напряжения стремятся к напряжениям, соответствующим площадке текучести материала.

Институт геологических наук  
Академии наук Армянской ССР

Լ. Ս. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

Ներկայացնելի լիտոսֆերայի կայունությունը առաձգական սահմանից դուրս

Հոդվածում պլաստիկության դեֆորմացիոն տեսության հիման վրա հետազոտված է առաձգական հիմք ունեցող սալի (լիտոսֆերայի) կայունությունը, որը բեռնավորված է բոլոր կողմերից:

Հուծված են թվային օրինակներ, որտեղ որոշված են կրիտիկական լարումները:

## ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> А. А. Ильюшин, Пластичность, М.—Л., Гостехиздат, 1948.
- <sup>2</sup> Ю. И. Работнов, С. А. Шестериков, ПММ, т. 21, вып. 3 (1957).
- <sup>3</sup> Р. М. Киракосян, Изв. АН Арм ССР. Механика, т. 27, № 4 (1974).
- <sup>4</sup> А. С. Вольмир, Устойчивость упругих систем, Гос. изд. физ.-мат. лит., М., 1963.
- <sup>5</sup> Д. Тёркот, Дж. Шуберт, Геодинамика. Ч. 1, М., Мир, 1985.
- <sup>6</sup> А. Т. Асланян, Междунар. геол. конгресс, XXI сессия. Докл. сов. геологов, 1960, Изд. АН СССР, М., 1960.