ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXIV 1987 5

УДК 519.7

МАТЕМАТИКА

А. А. Алексанян

О сложности представления симметричных подмножеств n-мерного единичного куба совокупностью систем линейных уравнений

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 4/II 1987)

1. Пусть $E^n=\{\tilde{\alpha}=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|\ \alpha_i\in\{0, 1\},\ i=\{1, 2, \ldots, n\}$—множество вершин n-мерного единичного куба. Множество $E^n_k=\{\tilde{\alpha}|\tilde{\alpha}\in E^n,\ \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=k\}$ называется k-тым слоем куба E^n. Символом $|A|$ обозначается мощность множества A. Подмножество, образованное объединением $\bigcup\limits_i E^n_{k_i}$ некоторого множества слоев, называется симметричным. Нетрудно заметить, что E^n является n-мерным линейным пространством над полем Галуа $GF(2)$. Подмножество A в E^n называется смежным классом, если найдется линейное подпространство B в E^n такое, что $A=B+d$, где $d\in E^n$ и сумма берется по mod 2, т. е. A является сдвигом некоторого подпространства B в E^n. Размерность A определяется как размерность соответствующего подпространства $\dim A\equiv\dim B$.

В настоящей работе исследована следующая задача. Пусть F—произвольное симметричное подмножество в E^n. Каково наименьшее число $S(F)$ смежных классов в E^n, объединение которых совпадает с F? Содержательно задача состоит в следующем. Требуется построить минимальное по мощности множество систем линейных уравнений над полем $GF(2)$ таких, что объединение решений этих систем совпадает с F.

Обозначим через $S(n)=\min S(F)$, где F пробегает множество симметричных подмножеств в E^n. Задача состоит в оценке величины $S(n)$

2. Положим $0\leqslant k\leqslant[n/2]$, где $[x]$—целая часть x. Пусть множество F совпадает с E^n_k. Смежный класс A называется максимальным для F, если $A\subseteq F$ и для всякого смежного класса A' из условия $A\subseteq A'\subseteq F$ следует: $A\equiv A'$. Очевидно, что слагаемые всякого покрытия F смежными классами могут быть заменены максимальными.

Пусть A—смежный класс и $A\subseteq F\equiv E^n_k$. Представим A в виде двоичной прямоугольной таблицы $T(A)$, строки которой совпадают с векторами из множества A. Ясно, что количество строк в таблице равно $2^{\dim A}$, количество столбцов—n и в каждой строке содержится в точности k единиц. Два столбца таблицы называются противоположными, если их покоординатная сумма по mod2 равна нулю. Столбец называется единичным (нулевым), если все элементы столбца равны 1(0).

Лемма 1. *Количество единичных столбцов в $T(A)$ не превосходит количества нулевых столбцов. Количество столбцов, совпадающих с фиксированным ненулевым столбцом в $T(A)$, равно количеству столбцов, им противоположных.*

Итак, таблица $T(A)$ состоит из пар противоположных столбцов, не нулевых и не единичных, и из определенного количества либо нулевых, либо единичных столбцов.

Припишем к $T(A)$ снизу ее копию, в которой на месте единичных столбцов записаны нулевые, а на месте части нулевых—единичные. Так как нулевых столбцов не меньше, чем единичных, то можно получить таблицу с k единицами в каждой строке. Нетрудно видеть, что строки новой таблицы образуют смежный класс. Поэтому таблица максимального для F смежного класса не может содержать одновременно и нулевые и единичные столбцы. Ввиду того, что $k \leqslant [n/2]$, получаем, что таблица максимального смежного класса не содержит единичных столбцов и содержит в точности k пар противоположных столбцов.

Пусть пары противоположных столбцов это столбцы с номерами $(1, 2), (3, 4), \ldots, (2k-1, 2k)$, а нулевые столбцы имеют номера: $2k+1, \ldots, n$. Теперь ясно, что максимальный смежный класс совпадает с множеством решений линейной системы над $GF(2)$:

$$\begin{cases} x_{2i-1}+x_{2i}=1 \\ x_j=0, \qquad i=1, \ldots, k; \; j=2k+1, \ldots, n. \end{cases}$$

Ввиду невырожденности матрицы этой системы $\dim A = n-(n-k)=k$ и количество элементов в A равно 2^k.

Лемма 2. *Максимальные для E_k^n смежные классы имеют размерность, равную k.*

3. Всякий максимальный для E_k^n смежный класс определяется однозначно некоторым разбиением множества $\{1, 2, \ldots, n\}=N_1 \cup N_2 \cup \ldots \cup N_k \cup P$, где $N_i \cap N_j=\varnothing$ при $i \neq j$ и $N_i \cap P=\varnothing$ для всех i. Однозначно также и обратное соответствие. Используя это, получаем:

Лемма 3. *Количество максимальных для E_k^n (при $0 \leqslant k \leqslant [n/2]$) смежных классов равно* $\dfrac{n!}{2^k \cdot k!(n-2k)!}$.

Лемма 4. *Количество максимальных для E_k^n (при $0 \leqslant k \leqslant [n/2]$) смежных классов, содержащих фиксированную вершину из E_k^n, равно* $\dfrac{(n-k)!}{(n-2k)!}$.

В работе (1) доказана

Лемма 5. *Пусть M—конечное множество и $D=\{K_1, \ldots, K_l\}$ такая совокупность его подмножеств, что каждый элемент из M принадлежит не менее чем $\gamma \cdot l$ подмножествам из D. Тогда существует покрытие множества M подмножествами D, содержащее не более $\gamma^{-1}(\ln\gamma|M|+1)+1$ подмножеств*

Из лемм 3, 4, 5 при $\gamma=2^k/\binom{n}{k}$ следует, что $F \equiv E_k^n$ можно представить в виде объединения смежных классов количеством не более const $\frac{k\binom{n}{k}}{2^k}$. Ввиду того, что $|E^n_k|=\binom{n}{k}$, а $|A|=2^k$ для любого максимального смежного класса, то требуется не менее $\binom{n}{k}/2^k$ смежных классов для покрытия E^n_k.

Теорема 1. *Для* $0\leqslant k\leqslant[n/2]$ $\binom{n}{k}\Big/2^k\leqslant S(E^n_k)\leqslant\text{const}\cdot k\binom{n}{k}\Big/2^k$.

4. Вернемся теперь к множеству произвольных симметричных подмножеств F в E^n, где $F=\bigcup\limits_i E^n_{k_i}$. Суммируя по всем $E^n_{k_i}$, получаем $S(n)\leqslant\text{const}\cdot n(3/2)^n$. Далее, ясно, что

$$2\left(\frac{n}{2}+1\right)S(n)\geqslant 2\sum_{k=0}^{[n/2]}S(E^n_k)\geqslant\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Итак, на вопрос, поставленный в начале работы, дает ответ

Теорема 2. $\frac{1}{n+2}(3/2)^n\leqslant S(n)\leqslant\text{const}\cdot n(3/2)^n$.

Иными словами $\log_2 S(n)\sim n(\log_2 3-1)$.

Ереванский государственный университет

Ա. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆՅԱՆ

n-չափանի միավոր խորանարդի սիմետրիկ ենթաբազմությունների գծային հավասարումների համակարգերով նկարագրման բարդության վերաբերյալ

Աշխատանքում դիտարկված է հետևյալ խնդիրը։ Դիցուք F-ը սիմետրիկ (այսինքն կոորդինատների տեղափոխությունների հանդեպ ինվարիանտ) ենթաբազմություն է n—չափանի միավոր խորանարդում՝ E^n-ում։ $S(F)$-ը այնպիսի գծային համակարգերի ($GF(2)$ դաշտի նկատմամբ) մինիմալ քանակն է, որոնց լուծումների բազմությունների միավորումը համընկնում է F-ի հետ։

Աշխատանքում գնահատված է $S(n)=\max\limits_{F\subseteq E^n}S(F)$ մեծությունը։ Հաջողվել է գնահատել $S(F)$-ը, երբ F-ը ներկայացնում է իրենից E^n-ի k-րդ շերտը՝ $\binom{n}{k}\Big/2^k\leqslant S(F)\leqslant c\cdot k\cdot\binom{n}{k}\Big/2^k$։ Հիմնվելով այդ արդյունքի վրա ստացվում է վերջնական գնահատականը՝

$$\frac{1}{n+2}\left(\frac{3}{2}\right)^n\leqslant S(n)\leqslant c\cdot n\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] Э. И. Нечипорук. ДАН СССР, т. 163, № 1 (1965).