ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXXIV 1987 4

УДК 517.55

МАТЕМАТИКА

А. И. Петросян

О множествах пика гладких функций в поликруге

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 2/X 1986)

Пусть U^n—единичный поликруг в пространстве $\mathbf{C}^n$: $U^n=\{z\in \mathbf{C}^n: |z_i|<1,\ i=1,\ldots, n\}$, Γ^n—его n-мерный остов, $A^k(U^n)$—класс функций, голоморфных в U^n, у которых все производные до k-го порядка включительно непрерывны на $\overline{U}^n$. Гладкое подмногообразие M остова называется интерполяционным многообразием, если для каждой точки $p\in M$ пересечение касательного пространства $T_p(M)$ с замкнутым конусом K_p в $T_p(\Gamma^n)$, образованным касательными векторами $\left.\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial\theta_n}\right|_p$, где $\theta_i=\arg z_i$, $i=1,\ldots, n$, удовлетворяет условию $K_p\cap T_p(M)=\{0\}$.

Множества пика равномерной алгебры $A^0(U^n)$ хорошо изучены (см., например, ([1])). Случай гладких функций рассмотрен в ([2]), где показано, что всякое компактное подмножество интерполяционного многообразия класса C^k является множеством пика для $A^{k-4}(U^n)$. Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение:

Теорема. *Всякое компактное подмножество интерполяционного многообразия M класса C^k ($k\geqslant 5$) на остове поликруга U^n является множеством пика для $A^{k-3}(U^n)$.*

При доказательстве используется метод, приведенный в ([3]) и соответствующим образом приспособленный для случая поликруга. Для заданного компакта $K\subset M$ сперва строится так называемая „почти аналитическая" функция пика $F(z)$.

Лемма 1. *Пусть M—то же, что в теореме, K—компакт на M. Тогда в некоторой окрестности Ω этого компакта существует функция $F\in C^k(\Omega)$ такая, что*

а) $F(z)=0$ *тогда и только тогда, когда* $z\in K$;

б) $\overline{\partial}F=0$ *на* M, *более того,* $\overline{\partial}F(z)=o(d(z, M)^{k-1})$, *где* $d(z, M)$—*расстояние между* z *и* M;

в) $\operatorname{Re}F(z)\geqslant cd(z, M)^2$;

г) $|F(z)|\geqslant cd(z, M)$, *где* c—*абсолютная константа,* $z\in\overline{U}^n\cap\Omega$.

Отметим, что в случае строго псевдовыпуклой области оценка $|F(z)|$ получается несколько иная (см. ([4])): $|F(z)|\geqslant cd(z, M)^2$ вдоль комплексного касательного направления.

Рассмотрим замкнутую дифференциальную форму типа $(0, 1)$

$g(z)=\bar{\partial}\dfrac{\lambda(z)}{F(z)}$, где $\lambda(z)$ бесконечно дифференцируемая, финитная в Ω функция, $\lambda(z)\equiv 1$ в некоторой окрестности компакта K и $0\leqslant\lambda(z)\leqslant 1$.

Лемма 2. *Уравнение $\bar{\partial}u=g$ в области U^n имеет решение $u(z)$, бесконечно дифференцируемое на множестве $\bar{U}^n\setminus M$ и удовлетворяющее оценке*

$$D^p u(z)=o(d(z, M)^{k-|p|-5}). \qquad (1)$$

Здесь $p=(p_1, \ldots, p_{2n})$ — целочисленный вектор, $|p|=\sum_{k=1}^{2n} p_k$ и

$$D^p u(z)=\frac{\partial^{|p|}u(z)}{\partial z_1^{p_1}\ldots\partial z_n^{p_n}\partial\bar{z}_1^{p_{n+1}}\ldots\partial\bar{z}_n^{p_{2n}}}.$$

Решение $u(z)$, допускающее оценку (1), выписывается весовой формулой, которая получена в [5]. В случае $n=2$ эта формула имеет вид

$$u(z)=-\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{|\zeta_1|=|\zeta_2|} g(\zeta)\wedge\left(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-z_1\bar{\zeta}_1}\right)^{\beta_1}\left(\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-z_2\bar{\zeta}_2}\right)^{\beta_2}\frac{d\zeta_1\wedge d\zeta_2}{(z_1-\zeta_1)(z_2-\zeta_2)}-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\substack{\{z_1\}\times D_2\\ |z_1|\geqslant|\zeta_2|}} g_2(z_1,\zeta_2)d\bar{\zeta}_2\wedge\left(\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-z_2\bar{\zeta}_2}\right)^{\beta_2}\frac{d\zeta_2}{\zeta_2-z_2}-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\substack{D_1\times\{z_2\}\\ |z_2|\geqslant|\zeta_1|}} g_1(\zeta_1, z_2)d\bar{\zeta}_1\wedge\left(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-z_1\bar{\zeta}_1}\right)^{\beta_1}\frac{d\zeta_1}{\zeta_1-z_1}+$$

$$+\frac{\beta_1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{|\zeta_2|\geqslant|\zeta_1|} g(z)\left(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-z_1\bar{\zeta}_1}\right)^{\beta_1-1}\left(\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-z_2\bar{\zeta}_2}\right)^{\beta_2}\frac{d\bar{\zeta}_1\wedge d\zeta_1}{1-z_1\bar{\zeta}_1}\cdot\frac{d\zeta_2}{\zeta_2-z_2}+$$

$$+\frac{\beta_2}{(2\pi i)^2}\int\limits_{|\zeta_1|\geqslant|\zeta_2|} g(\zeta)\left(\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-z_2\bar{\zeta}_2}\right)^{\beta_2-1}\left(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-z_1\bar{\zeta}_1}\right)^{\beta_1}\frac{d\bar{\zeta}_2\wedge d\zeta_2}{1-z_2\bar{\zeta}_2}\,\frac{d\zeta_1}{\zeta_1-z_1}.$$

Здесь β_1 и β_2 произвольные неотрицательные числа.

Доказательство теоремы проводится по следующей схеме. Функция

$$v(z)=\frac{\lambda(z)}{F(z)}-u(z),$$

где $u(z)$ является решением $\bar{\partial}$-уравнения с оценкой (1), очевидно, голоморфна в U^n. Далее, $\operatorname{Re}v(z)=\lambda(z)\dfrac{\operatorname{Re}F(z)}{|F(z)|^2}-\operatorname{Re}u(z)$. Из (1) при $k\geqslant 5$ и $p=0$ следует, что $u(z)=o(d(z, M))$, т. е. $u(z)$ ограничена на $\bar{U}^n$. Поэтому с учетом *в*) и (1) имеем $\operatorname{Re}v(z)\geqslant-\max\limits_{z\in\bar{U}^n}\operatorname{Re}u(z)>-\infty$. Добавив в случае необходимости к функции $u(z)$ соответствующую константу, можно считать, что

$$\operatorname{Re}v(z)>0,\quad z\in\bar{U}^n\setminus K. \qquad (2)$$

Функция
$$f(z)=\frac{1}{v(z)}=\frac{F(z)}{\lambda(z)-u(z)F(z)} \qquad (3)$$

является искомой; она голоморфна в U^n, и, как следует из (2), $\mathrm{Re} f(z) > 0$ при $z \in \overline{U}^n \setminus K$. Из (3) следует, что нули $f(z)$ совпадают с нулями $F(z)$, т. е. с множеством K. На множестве $\overline{U}^n \setminus K$ функция f принадлежит классу C^k. Вычислив производные $D^p f$ и используя оценки (1), убеждаемся, что $f \in A^{k-3}(U^n)$.

Ереванский государственный университет

Ա. Ի. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

Բազմաշրջանում ողորկ ֆունկցիաների պիկի բազմությունների մասին

Դիցուք U^n-ը C^n տարածության մեջ բազմաշրջան է, M-ը նրա հենքի վրա գտնվող ինտերպոլյացիոն բազմաձևություն է. այսինքն յուրաքանչյուր $p \in M$ կետում M-ի շոշափող տարածությունը հատվում է $\frac{\partial}{\partial\theta_1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial\theta_n}\Big|_p$ վեկտորներով առաջացած իրակ կոնի հետ միայն մեկ կետով: $A^k(U^n)$-ով նշանակվում է U^n-ում հոլոմորֆ և $\overline{U}^n$-ում մինչև k-րդ կարգի անընդհատ ածանցյալներ ունեցող ֆունկցիաների դասը: Հոդվածի հիմնական արդյունքը հետևյալն է. եթե M-ը պատկանում է ողորկության C^k դասին, ապա կամայական $K \subset M$ կոմպակտ բազմությունը հանդիսանում է պիկի բազմություն $A^{k-3}(U^n)$-ի համար:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *У. Рудин.* Теория функций в поликруге, Мир, М., 1974. [2] *R. Saerens*, Ph. D. dissertation, Unive sity of Washington, Seattle, 1983. [3] *M. Hakim, N. Sibony*, Duke Math. J., v. 45, p. 601—617 (1978). [4] *J. Chaumat, A. M. Chollet*, Ann. Inst. Fourier, v. 29, p. 171—200 (1979). [5] *G. M. Henkin, P. L. Polyakov*, Comptes rendus, 298, série I, 5 - 8 (1984).