ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXXIV 1987 4

УДК 517.553

МАТЕМАТИКА

И. М. Геворкян

Аппроксимация многочленами и некоторые вопросы слабой обратимости в весовых пространствах аналитических функций

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 2/X 1986)

1°. Пусть Π—правая полуплоскость, $\mathscr{H}(\Pi)$—множество всех аналитических в Π функций. Предположим, что φ монотонно растущая, неотрицательная функция на $(0, +\infty)$. Символом A^p_φ $(0<p<+\infty)$ обозначим пространство

$$A^p_\varphi=\{f\in\mathscr{H}(\Pi):\|f\|^p_{A^p_\varphi}=\int_\Pi|f(\xi)|^p\exp(-\varphi(|\xi|))\}dm_2(\xi)<+\infty,$$

где m_2—плоская мера Лебега.

Пусть далее $A^\infty_\varphi=A_\varphi=\{f\in\mathscr{H}(\Pi):f\in C(\overline{\Pi}),\quad |f(z)|\cdot\exp(-\varphi(|z|))\to\to 0(|z|\to+\infty),\ \|f\|_{A_\varphi}=\sup_{z\in\Pi}\{|f(z)|\exp(-\varphi(|z|))\}$.

М. М. Джрбашяном в работе [1] была найдена полная характеристика тех φ, для которых множество всех многочленов $\mathscr{P}$ всюду плотно в пространствах A^2_φ и A_φ. А именно, им была доказана

Теорема А. *Пусть φ монотонно растущая, неотрицательная функция на* $(0, +\infty)$. *Предположим, что* $t\varphi'(t)\uparrow\infty(t\to\infty)$.

Тогда следующие утверждения равносильны:

1) *множество $\mathscr{P}$ всюду плотно в пространстве* A^2_φ;

2) $\displaystyle\int^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}dt=+\infty.$

Аналогичное утверждение справедливо и в случае пространства A_φ. В первой части этой заметки мы распространим теорему A на случай A^p_φ, где $0<p<+\infty$. При этом отметим, что основная идея доказательства теоремы А о сведении вопроса полноты к изучению проблемы Ватсона сохраняется и при $1<p<+\infty$.

Во второй части мы изучаем вопросы полноты рациональных функций в весовых пространствах аналитических в многосвязном круге функций.

2°. Справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. *Пусть φ—монотонная, неотрицательная функция на* $(0, +\infty)$, *и предположим, что* $t\varphi'(t)\uparrow+\infty$, $(t\to+\infty)$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1) *система полиномов полна в пространстве $A^{p_0}_\varphi$ при некотором* $0<p_0<+\infty$;

2) *система полиномов полна в пространствах* A^p_φ *при всех* $0<p<+\infty$;

3) $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt=+\infty.$

Замечание. Отметим, что если вместо полноты многочленов рассматривать полноту системы $\left\{\frac{1}{z-z_k}\right\}_1^\infty$, $\operatorname{Re} z_k<0$, $k=1, 2, \ldots,$ в пространствах A^p_φ, то условие полноты существенно зависит от p (см. ([2])).

Доказательство теоремы опирается на следующие вспомогательные утверждения.

Пусть D — единичный круг на комплексной плоскости и $z=L(w)=\dfrac{1+w}{1-w}$ — дробно-линейное отображение D на П. Предположим $f\in\mathscr{H}(\Pi)$. Тогда функция $g(w)=f(L(w))=f\left(\dfrac{1+w}{1-w}\right)\in\mathscr{H}(D)$.

Следовательно, $g(w)$ допускает в D разложение $g(w)=\sum\limits_0^{+\infty} a_k w^k$, $w\in D$.

Поэтому между функциями $f\in\mathscr{H}(\Pi)$ и последовательностями $\{a_k\}_0^\infty$, $\varlimsup\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}=1$ осуществляется взаимно-однозначное соответствие. Отображение $f\to\{a_k\}_0^\infty$ обозначим через $B(f)$.

Лемма 1. *Пусть* Φ — *линейный непрерывный функционал на* A^p_φ, $0<p<+\infty$ *и* $\{a_k\}_0^\infty=B(f)$, *тогда имеет место следующее представление*

$$\Phi(f)=\lim_{\rho\to 1-0}\sum_{k=0}^{\infty} a_k\Phi\left[\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^k\right]\rho^k.$$

Лемма 2. *Пусть* $0<p_1\leqslant p_2<+\infty$ *и* $\displaystyle\int^{+\infty}\exp\{-\varphi(t)\}dt<+\infty$. *Тогда* $A^{p_2}_\varphi\subset A^{p_1}_\varphi$ *и имеет место оценка*

$$\|f\|_{A^{p_2}_\varphi}\leqslant C(p_1, p_2, \varphi)\|f\|_{A^{p_1}_\varphi},\quad f\in A^{p_2}_\varphi.$$

Лемма 3. *Пусть* $0<p<+\infty$, $0<r<\dfrac{1}{2}$ и $f\in A^p_\varphi$. *Тогда для произвольного* $\varepsilon>0$ *справедливо неравенство*

$$\int_\Pi |f(z)|^2(\operatorname{Re} z)^{4/p}\exp\left\{-\left(\varepsilon+\frac{2}{p}\right)\varphi(|z|(1+r))\right\}dm_2(z)\leqslant$$
$$\leqslant C(r,p)\|f\|_{A^p_\varphi}\int_1^{+\infty}\exp(-\varepsilon\varphi(r))dr.$$

Наметим ход доказательства теоремы 1. Сначала приведем 3)$\Rightarrow$2). Пусть $1<p<+\infty$ и Φ—линейный непрерывный функционал на A^p_φ. Положим $l_w(z)=\dfrac{1}{z-w}$, $\mathrm{Re}\, z>0$, $\mathrm{Re}\, w<0$. Тогда с использованием условия 3) устанавливается, что $F(w)=\Phi(l_w)\equiv 0$, $\mathrm{Re}\, w<0$. Исходя из этого получаем, что $\Phi(f)=0$ для любой $f\in\mathcal{H}(\Pi)$, $\|f\|_\infty\leqslant 1$. Учитывая лемму 1, получаем, что $\Phi(f)=0$, $\forall f\in A^p_\varphi$. При $0<p\leqslant 1$ используется плотность $A^2_\varphi\cap A^p_\varphi$ в пространстве A^p_φ.

Импликация 1)$\Rightarrow$3) при помощи лемм 2, 3 сводится к той же импликации при $p=2$. 2)$\Rightarrow$1) очевидно.

3.° Пусть $D_1=D$, $z_i\in D_1$. Пусть $0<\rho_i<1-|z_i|$, и предположим, что $|z-z_i|<\rho_i$, $i=2, \ldots, n$ не пересекаются. Обозначим $D_i=\{z\in D: |z-z_i|>\rho_i$, $i=2, \ldots, n\}$, и положим $G=\bigcap\limits_{i=1}^{n} D_i$.

Пусть $\mathcal{H}(G)$—множество всех голоморфных в G функций, $d(z)$—расстояние от точки $z\in G$ до границы ∂G. Введем также обозначение:

$$A_\varphi(G)=\left\{ f\in\mathcal{H}(G): |f(z)|=0\left(\exp\left(\varphi\left(\frac{1}{d(z)}\right)\right)\right),\quad d(z)\to 0\right\}.$$

Определение. Функция $f\in A_\varphi(G)$, $f(z)\neq 0$, $z\in G$ называется слабообратимой в $A_\varphi(G)$, если существует последовательность рациональных функций, полюсы которых принадлежат CG и $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n f=1$, причем сходимость имеет место в пространстве $A_\varphi(G)$.

Нетрудно заметить, что слабая обратимость функций f в A_{φ_2} эквивалентна полноте системы рациональных функций в весовом пространстве

$$A^f_{\varphi_2}=\{ f\in\mathcal{H}(G): \|g\|_{A^{f_2}_\varphi}=\|f\cdot g\|_{A_{\varphi_2}}<+\infty\}.$$

Имеет место следующее утверждение:

Теорема 2. *Пусть* φ_1 и φ_2 *—положительные возрастающие функции на* $(0, +\infty)$. *Предположим также, что выполнены следующие условия:*

1. $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\log\varphi_1(t)}{\log(t)}<+\infty$ *и при некоторых* $\alpha, \beta\in(0, 1)$ *справедлива*

оценка
$$\varphi_1\left(\frac{t^\alpha}{t^\alpha-(t-1)^\alpha}\right)-\beta\varphi_2(t)=0(1),\ t\to+\infty;$$

2. $t\varphi_2'(t-1)$ *монотонно в окрестности* $+\infty$ *и*

$$\int^{+\infty}\left(\frac{\varphi_2(t)}{t^3}\right)^{\frac{1}{2}} dt=+\infty.$$

Тогда каждая функция $f\in A_{\varphi_1}(G)$, $f(z)\neq 0$, $z\in G$ слабо обратима в $A_{\varphi_2}(G)$. Отметим, что в случае, когда G совпадает с единичным кругом, аналог теоремы 2 доказан в ([3]).

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Ի. Մ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

Անալիտիկ ֆունկցիաների կշռային տարածություններում բազմանդամային մոտարկումների և թույլ հակադարձելիության մի քանի հարցերի մասին

Դիցուք φ-ն մոնոտոն աճող ֆունկցիա է $[0, +\infty)$ *կիսաառանցքի վրա* $(\varphi(0)>0)$, *իսկ* Π-*ն աջ կիսահարթությունն է։ Նշանակենք* A^p_φ $(0<p<+\infty)$ Π-*ում անալիտիկ այն* f *ֆունկցիաների տարածությունը, որոնց համար*

$$\|f\|_{A^p_\varphi} = \int_\Pi |f(z)|^p e^{\varphi(|z|)} dm_2(z) < +\infty,$$

որտեղ՝ $m_2(z)$*-ը Լեբեգի մակերեսային չափն է։*

Հոդվածում ստացված են A^p_φ $(0<p<+\infty)$ *տարածություններում բազմանդամների լրիվության անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. М. Джрбашян*, ДАН СССР, т. 4 (XVI), № 6 (1954). [2] *Ф. А. Шамоян*, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 8, № 6 (1978). [3] *Н. К. Никольский*, Труды МИАН СССР им. В. А. Стеклова, т. 120 (1974).