УДК 517.98

МАТЕМАТИКА

Г. В. Вирабян, Г. А. Саргсян

О кратной полноте для одного дифференциального пучка,
 порожденного смешанной краевой задачей

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 25/VI 1986)

В единичном круге Ω_0 с центром в начале координат рассматривается следующая смешанная однородная краевая задача на собственные значения;

$$L_\lambda(u) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \lambda^2 \Delta u = 0, \quad (I)$$

$$Gu \stackrel{\text{def}}{=} \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega_0} = 0, \quad (II)$$

где Δ —двумерный оператор Лапласа, $\partial \Omega_0$ —единичная окружность, а α и β действительные числа, относительно которых предполагается, что

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1. \quad (1)$$

Задача (I), (II) в случае $\alpha=1, \beta=0$ ранее рассмотрена в работе ⁽¹⁾, где путем построения рекуррентных формул доказано существование полной системы полиномиальных собственных функций в комплексном соболевском гильбертовом пространстве $H = \overset{0}{W}_2^{(1)}(\Omega_0) \oplus \overset{0}{W}_2^{(1)}(\Omega_0)$. В настоящей заметке устанавливается двукратная полнота системы полиномиальных собственных функций задачи (I), (II) в гильбертовом пространстве H .

В комплексных переменных задача (I), (II) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - [\mu_1(\lambda) + \mu_2(\lambda)] \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} + \mu_1(\lambda) \cdot \mu_2(\lambda) \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2} = 0, \quad (I^*)$$

$$\alpha u + \beta z \frac{\partial u}{\partial z} + \beta \bar{z} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \Big|_{\partial \Omega_0} = 0, \quad (II^{**})$$

где $\mu_1(\lambda) = 1 - 2\lambda i; \mu_2(\lambda) = \frac{1}{1 + 2\lambda i}$. (2)

Обозначим систему полиномиальных решений задачи (I), (II) в случае $\alpha=1, \beta=0$, существование которых установлено в ⁽¹⁾, через

$$v_{\lambda_n}(z, \bar{z}), \quad (n=1, 2, \dots), \quad (3)$$

которые соответствуют собственным значениям λ_n ($n=1, 2, \dots$). Заметим, что система (3) в соболевском пространстве $\overset{0}{W}_2^{(1)}(\Omega_0)$ является

двукратно полной в смысле М. В. Келдыша ⁽²⁾. Функции из (3) имеют вид

$$v_{\lambda_m}(z, \bar{z}) = \varphi_m(z + \mu_1(\lambda_m)\bar{z}) + \psi_m(z + \mu_2(\lambda_m)\bar{z}), \quad (4)$$

$$(m=1, 2, \dots),$$

$$\text{где } \varphi_m(t) = \sum_{k=0}^{n_m} c_k^{(m)} t^k, \quad t = z + \mu_1(\lambda_m)\bar{z}; \quad (5)$$

$$\psi_m(\tau) = \sum_{k=0}^{n_m} d_k^{(m)} \tau^k, \quad \tau = z + \mu_2(\lambda_m)\bar{z}. \quad (6)$$

Ищем собственные функции задачи (I), (II) в виде

$$u_{\lambda_m}(z, \bar{z}) = \Phi_m(z + \mu_1(\lambda_m)\bar{z}) + \Psi_m(z + \mu_2(\lambda_m)\bar{z}), \quad (7)$$

где $\Phi_m(t)$, $\Psi_m(\tau)$ — полиномы, с неопределенными коэффициентами, степени n_m :

$$\Phi_m(t) = \sum_{k=0}^{n_m} a_k^{(m)} t^k; \quad \Psi_m(\tau) = \sum_{k=0}^{n_m} b_k^{(m)} \tau^k. \quad (8)$$

Потребуем, чтобы функция $u_{\lambda_m}(z, \bar{z})$ удовлетворяла следующему соотношению:

$$\alpha u_{\lambda_m}(z, \bar{z}) + \beta \frac{\partial u_{\lambda_m}(z, \bar{z})}{\partial n} = v_{\lambda_m}(z, \bar{z}), \quad (9)$$

Из (4), (7) будем иметь

$$\alpha \Phi_m(t) + \beta t \Phi_m'(t) + \alpha \Psi_m(\tau) + \beta \tau \Psi_m'(\tau) = \varphi_m(t) + \psi_m(\tau). \quad (10)$$

Отсюда относительно неизвестных функций $\Phi_m(t)$ и $\Psi_m(\tau)$ можно написать следующую систему равенств:

$$\begin{cases} \alpha \Phi_m(t) + \beta t \Phi_m'(t) = \varphi_m(t), & (11) \\ \alpha \Psi_m(\tau) + \beta \tau \Psi_m'(\tau) = \psi_m(\tau). & (12) \end{cases}$$

Подставляя выражения (5), (6), (8) в систему (11)—(12) обыкновенных дифференциальных уравнений, получим

$$\alpha \sum_{k=0}^{n_m} a_k^{(m)} t^k + \beta t \sum_{k=0}^{n_m} k a_k^{(m)} t^{k-1} = \sum_{k=0}^{n_m} c_k^{(m)} t^k, \quad (13)$$

$$\alpha \sum_{k=0}^{n_m} b_k^{(m)} \tau^k + \beta \tau \sum_{k=0}^{n_m} k b_k^{(m)} \tau^{k-1} = \sum_{k=0}^{n_m} d_k^{(m)} \tau^k. \quad (14)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t и τ , будем иметь

$$\begin{cases} \alpha a_k^{(m)} + \beta k a_k^{(m)} = c_k^{(m)}, \\ \alpha b_k^{(m)} + \beta k b_k^{(m)} = d_k^{(m)} \end{cases} \quad k=0, 1, \dots, n_m. \quad (15)$$

Отсюда находим

$$a_k^{(m)} = \frac{c_k^{(m)}}{\alpha + \beta k}; \quad b_k^{(m)} = \frac{d_k^{(m)}}{\alpha + \beta k}; \quad k=0, 1, \dots, n_m. \quad (16)$$

Таким образом, доказана следующая лемма:

Лемма 1. Если $\alpha/\beta \neq -k$, $k=1, 2, 3, \dots$, то каждой собственной функции задачи (I), (II) (при $\alpha=1, \beta=0$) соответствует полиномиальная собственная функция задачи (I), (II) с тем же собственным значением.

Таким образом, при выполнении условий

$$\alpha/\beta \neq -k \quad (k=1, 2, \dots) \quad (17)$$

нами доказано существование бесконечной системы полиномиальных собственных функций задачи (I), (II). Обозначим эту систему через

$$\{\lambda_m, u_{\lambda_m}(z, \bar{z})\}_{m=1}^{\infty}. \quad (18)$$

Теорема 1. Система полиномиальных собственных функций (18) задачи (I), (II) образует двукратно полную систему в гильбертовом пространстве $W_2^0(\Omega_0)$.

Доказательству этой теоремы предположим одну вспомогательную лемму. Обозначим через $\mathcal{P}$ множество всех полиномов от $z, \bar{z}$. Оператор G действует в $\mathcal{P}$ согласно формуле

$$Gp = \alpha p + \beta z \frac{\partial p}{\partial z} + \beta \bar{z} \frac{\partial p}{\partial \bar{z}}, \quad p \in \mathcal{P}. \quad (19)$$

Легко видеть, что если

$$p(z, \bar{z}) = \sum_{i+j=0}^N a_{ij} z^i \bar{z}^j, \quad (20)$$

$$\text{то } Gp(z, \bar{z}) = \sum_{i+j=0}^N [\alpha + \beta(i+j)] a_{ij} z^i \bar{z}^j.$$

Лемма 2. При выполнении условий (17) оператор G отображает многообразие полиномов $\mathcal{P}$ на себя одно-однозначно.

Доказательство. Очевидно, что G отображает $\mathcal{P}$ в $\mathcal{P}$. Пусть $p(z, \bar{z})$ произвольный полином из $\mathcal{P}$. Рассмотрим новый полином

$$q(z, \bar{z}) = \sum_{i+j=0}^N \frac{a_{ij}}{[\alpha + (i+j)\beta]} \cdot z^i \bar{z}^j. \quad (21)$$

$$\text{Легко проверить, что } Gq(z, \bar{z}) = p(z, \bar{z}). \quad (22)$$

$$\text{Пусть теперь } Gp(z, \bar{z}) = 0. \quad (23)$$

$$\text{Тогда } \sum_{i+j=0}^N [\alpha + \beta(i+j)] a_{ij} z^i \bar{z}^j = 0$$

$$\text{Отсюда следует } [\alpha + (i+j)\beta] a_{ij} = 0, \quad i+j=0, 1, \dots, N. \quad (24)$$

В силу (17) имеем $a_{ij} = 0$, $i+j=0, 1, \dots$, т. е. $p(z, \bar{z}) \equiv 0$. Лемма доказана.

Следствие 1. Из доказанной леммы следует существование обратного оператора G^{-1} , отображающего $\mathcal{P}$ на $\mathcal{P}$, согласно формуле

$$G^{-1}p(z, \bar{z}) = \sum_{i+j=0}^N \frac{a_{ij}}{[\alpha + \beta(i+j)]} z^i \bar{z}^j. \quad (25)$$

Доказательство теоремы 1. Как показано в работе (1), система векторов

$$\left\{ \hat{v}_{\lambda_m} = \begin{pmatrix} v_{\lambda_m} \\ \lambda_m v_{\lambda_m} \end{pmatrix} \right\}_{m=1}^{\infty} \quad (26)$$

образует полную систему в ортогональной сумме гильбертовых пространств

$$H = W_2^{(1)}(\Omega_0) \oplus W_2^{(1)}(\Omega_0). \quad (27)$$

Согласно лемме 1 каждой собственной функции v_{λ_m} задачи (I), (II) (при $\alpha=1, \beta=0$) соответствует собственная функция u_{λ_m} задачи (I), (II), так что

$$Gu_{\lambda_m} = v_{\lambda_m}. \quad (28)$$

Положим

$$\hat{G} \hat{u}_{\lambda_m} = \begin{pmatrix} Gu_{\lambda_m} \\ \lambda_m Gu_{\lambda_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{\lambda_m} \\ \lambda_m v_{\lambda_m} \end{pmatrix} = \hat{v}_{\lambda_m}. \quad (29)$$

Пусть $\hat{w} \in H$ — произвольная вектор-функция с полиномиальными компонентами

$$\hat{w} = \begin{pmatrix} (1-z\bar{z})^2 p(z, \bar{z}) \\ (1-z\bar{z})^2 q(z, \bar{z}) \end{pmatrix}, \quad (30)$$

где p и q произвольные полиномы от $z, \bar{z}$. Тогда очевидно, что $\hat{G}\hat{w} \in H$. Но, как показано в работе (1), вектор-функцию $\hat{G}\hat{w}(z, \bar{z})$ можно представить в виде конечной линейной комбинации собственных векторов $\hat{v}_{\lambda_m}$, соответствующих задаче (I), (II) (при $\alpha=1, \beta=0$):

$$\hat{G}\hat{w} = \sum_m \alpha_m \hat{v}_{\lambda_m} = \begin{pmatrix} \sum_m \alpha_m v_{\lambda_m} \\ \sum_m \lambda_m \alpha_m v_{\lambda_m} \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Из (29) и (31) имеем

$$\hat{G}\hat{w} = \sum_m \alpha_m \hat{G} \hat{u}_{\lambda_m} = \hat{G} \left(\sum_m \alpha_m \hat{u}_{\lambda_m} \right). \quad (32)$$

В силу существования (лемма 2) обратного оператора G^{-1} , из (32) заключаем

$$\hat{w} = \sum_m \alpha_m \hat{u}_{\lambda_m}. \quad (33)$$

Но поскольку, как это показано в работе (3), множество полиномиальных векторов вида (30) всюду плотно в гильбертовом пространстве H , то теорема доказана.

Замечание. В случае $\alpha=0, \beta=1$, т. е. в случае задачи Неймана для уравнения (1), оператор G принимает вид

$$Gu = z \frac{\partial u}{\partial z} + \bar{z} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}.$$

Этот оператор на пространстве всех полиномов $\mathcal{P}$ не имеет обратного G^{-1} . В этом случае оператор G^{-1} можно применить на тех и только тех полиномах, которые обращаются в нуль в начале коор-

динат. Поэтому с помощью вышеприведенной процедуры можно построить те собственные функции задачи Неймана, которые соответствуют тем собственным функциям задачи Дирихле (I), (II) (при $\alpha=1, \beta=0$), которые обращаются в нуль при $z=0$.

Таким образом, построенная система полиномиальных собственных функций задачи Неймана не образует двукратно полную систему в гильбертовом пространстве $\overset{0}{W}_2^1(\Omega_0)$.

Ереванский государственный
университет

Գ. Վ. ՎԻՐԱԲՅԱՆ, Գ. Ա. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Խառն եզրային խնդրից ծնված մի դիֆերենցիալ փնջի համար
բազմապատիկ լրիվության մասին

Աշխատանքում (I), (II) համասեռ եզրային սպեկտրալ խնդրի համար, երբ Ω տիրույթը միավոր շրջանն է, ապացուցված է բազմանդամային սեփական ֆունկցիաների համակարգի կրկնապատիկ լրիվությունը $\overset{0}{W}_2^1(\Omega)$ կոմպակտ սորոկլան-հիլբերտյան սարածություն մեջ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Т. И. Зеленьяк, ДАН СССР, т. 158, № 6 (1964). ² М. Г. Крейн, Г. К. Лангер, Тр. междунар. симп. по применению т. ф. к. п. в механике сплошной среды, Наука, М., 1965. ³ Г. В. Вирабян, ДАН АрмССР, т. 48, № 2 (1969).