ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXXIV 1987 3

УДК 624.131.54:539.3

МЕХАНИКА

Л. А. Агаловян, С. Х. Адамян

О коэффициенте постели для оснований с переменными упругими характеристиками

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 25/VI 1986)

На основе точного решения трехмерной задачи для слоя с переменными упругими характеристиками рассматривается вопрос определения коэффициента постели. Упругое основание рассматривается как сжимаемый слой толщины 2h, лежащий на абсолютно жесткой подстилке со сцеплением (вектор перемещения там равен нулю). Считается, что упругий модуль слоя есть функция от поперечной координаты.

В общем случае требуется определить напряженно-деформированное состояние анизотропной пластинки Ω, $\Omega=\{(\alpha, \beta, \gamma): \alpha, \beta \in \sum, -h\leqslant\gamma\leqslant h\}$, где α, β—ортогональные криволинейные координаты на срединной поверхности $\sum$, при условиях

$$\sigma_{\alpha\gamma}=\sigma^+_{\alpha\gamma}(\alpha, \beta),\ \sigma_{\beta\gamma}=\sigma^+_{\beta\gamma}(\alpha, \beta),\ \sigma_{\gamma\gamma}=-\sigma^+_{\gamma\gamma}(\alpha, \beta) \text{ при } \gamma=h; \tag{1}$$

$$u_\alpha=u_\beta=u_\gamma=0 \text{ при } \gamma=-h \tag{2}$$

и условиях на боковой поверхности. Последние в рассматриваемой задаче играют существенную роль лишь вблизи боковой поверхности. Ими обусловлен пограничный слой, т. е. такое решение, которое быстро затухает при удалении от боковой поверхности во внутрь области Ω.

Чтобы решить поставленную трехмерную задачу, в уравнениях теории упругости перейдем к безразмерным координатам и перемещениям по формулам

$$\alpha=\xi l,\ \beta=\eta l,\ \gamma=h\zeta=\varepsilon l\zeta,\ \varepsilon=h/l,$$
$$u=u_\alpha/l,\ v=u_\beta/l,\ w=u_\gamma/l, \tag{3}$$

где l—характерный размер пластинки (наименьший из тангенциальных линейных размеров), считается $2h\ll l$.

В системе безразмерных координат ξ, η, ζ уравнения теории упругости: уравнения равновесия, соотношения состояния и связи деформации—перемещения, составляют сингулярно возмущенную малым параметром ε систему. Согласно математической теории таких систем, решение складывается из двух типов решений: решения внутренней задачи (проникающая часть общего решения) и решения пограничного слоя, локализованного вблизи боковой поверхности, линий смены типа граничных условий или разрыва непрерывности поверхностной нагрузки. Как построить эти решения в плоском и пространственном случаях при постоянных упругих характеристиках, изложено в работах [1,2]. Развитый там подход применим также и для случая с переменными упругими характеристиками. Приведем решение внутренней задачи для некоторых случаев изменения модуля упругости и граничных краевых задач изотропных пластинок.

Пусть модуль упругости изотропной пластинки меняется по закону

$$E=\frac{1}{2}(E_1+E_2)+\frac{1}{2}(E_1-E_2)\zeta, \quad -1\leqslant\zeta\leqslant1,$$

$$\nu\approx\mathrm{const},\ E_1,\ E_2=\mathrm{const}, \tag{4}$$

где ν—коэффициент Пуассона, а модуль E изменяется по толщине слоя линейно, принимая на поверхностях $\zeta=\pm1$ значения E_1, E_2. Решением пространственной задачи (1)—(2), если $\sigma^+_{\alpha\gamma}$, $\sigma^+_{\beta\gamma}$, $\sigma^+_{\gamma\gamma}=\mathrm{const}$, является

$$\sigma_{\alpha\gamma}=\sigma^+_{\alpha\gamma},\quad \sigma_{\beta\gamma}=\sigma^+_{\beta\gamma},\quad \sigma_{\gamma\gamma}=-\sigma^+_{\gamma\gamma};$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}=-\frac{\nu}{1-\nu}\sigma^+_{\gamma\gamma},\quad \sigma_{\beta\beta}=-\frac{\nu}{1-\nu}\sigma^+_{\gamma\gamma},\quad \sigma_{\alpha\beta}=0; \tag{5}$$

$$u_\alpha=4h(1+\nu)k_1\sigma^+_{\alpha\gamma},\quad u_\beta=4h(1+\nu)k_1\sigma^+_{\beta\gamma};$$

$$u_\gamma=-\frac{2h(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}k_1\sigma^+_{\gamma\gamma},\quad k_1=\left[\ln\frac{(E_1-E_2)\zeta+E_1+E_2}{2E_2}\right]/(E_1-E_2).$$

Если будет действовать лишь нормальная нагрузка с постоянной интенсивностью ($\sigma^+_{\alpha\gamma}=0$, $\sigma^+_{\beta\gamma}=0$), из решения (5) вытекает $u_\alpha=u_\beta=0$, а между нормальным давлением и соответствующим перемещением получается связь

$$\sigma_{\gamma\gamma}=ku^{*}_{\gamma}(h),\quad k=k_0\frac{c-1}{\ln c},\quad c=E_2/E_1, \tag{6}$$

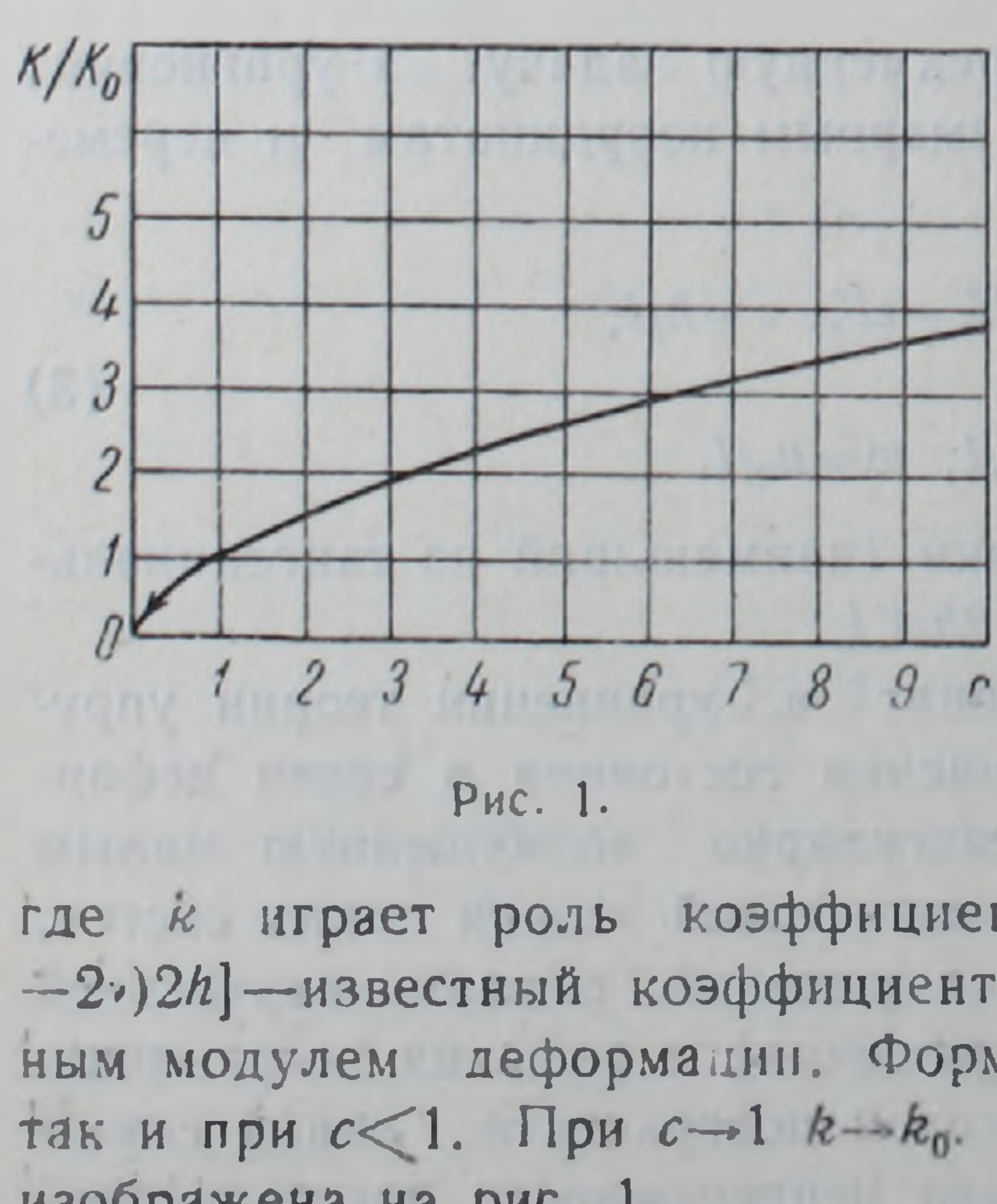

Рис. 1.

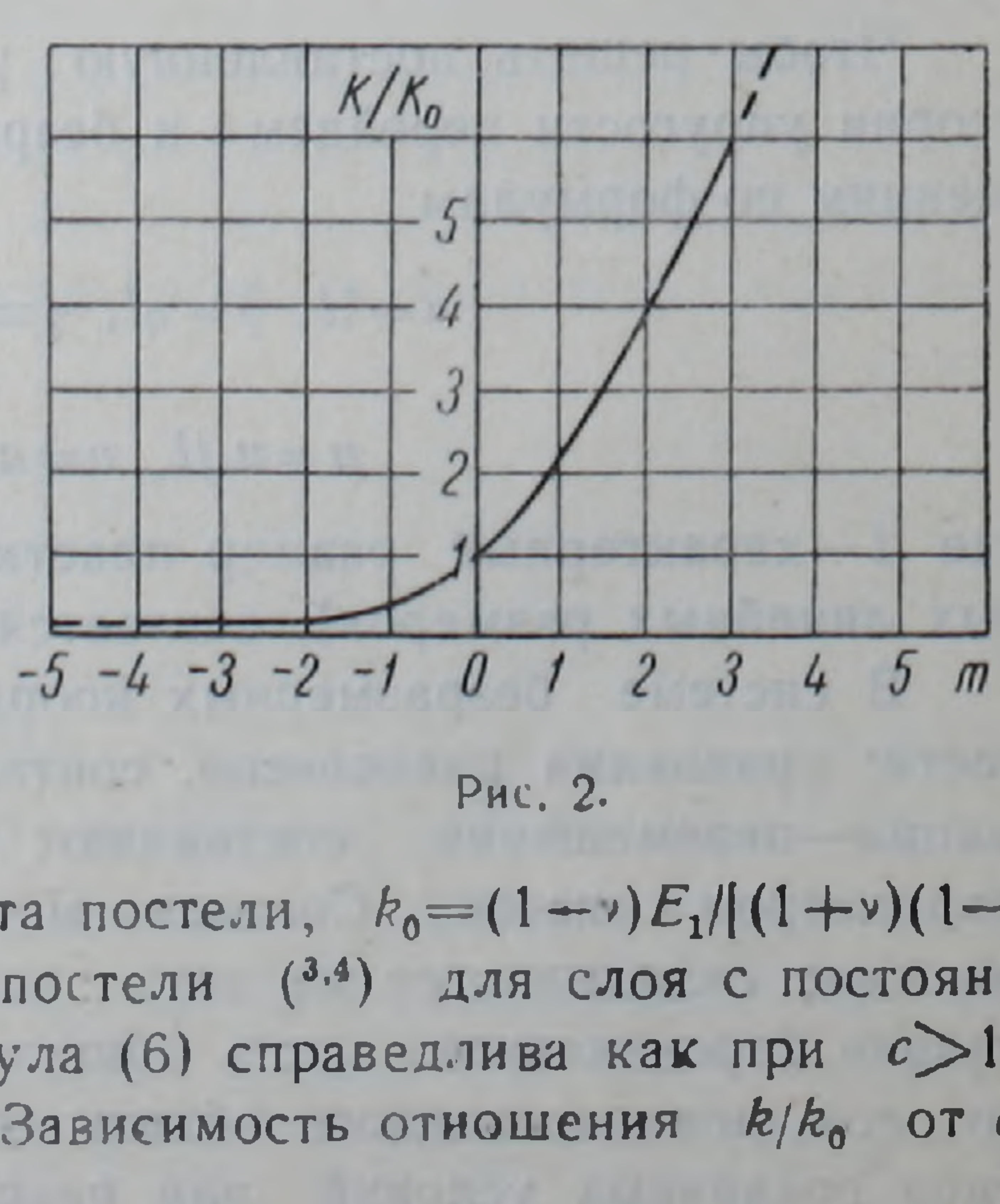

Рис. 2.

где k играет роль коэффициента постели, $k_0=(1-\nu)E_1/[(1+\nu)(1-2\nu)2h]$—известный коэффициент постели [3,4] для слоя с постоянным модулем деформации. Формула (6) справедлива как при $c>1$, так и при $c<1$. При $c\to1$ $k\to k_0$. Зависимость отношения k/k_0 от c изображена на рис. 1.

Если внешняя нормальная нагрузка переменна, т. е. она представляется функцией от ξ, то зависимость (6) выполняется приближенно, поскольку в точном решении появляются дополнительные слагаемые, кроме того u_α, $u_\beta \neq 0$. Однако новые слагаемые на порядок меньше винклеровского слагаемого, поэтому ими можно пренебречь. Например, если при $\gamma = h$ имеем $\sigma_{\gamma\gamma}(h) = -(\sigma_1\xi + \sigma_2)$, то

$$u_\alpha = -\frac{h}{l}\sigma_1\left[\frac{4\nu(1+\nu)}{1-\nu}hk_1 + \ldots\right], \quad u_\beta = 0, \quad u_\gamma = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)2h}{1-\nu}k_1(\sigma_1\xi + \sigma_2);$$

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \sigma_{\beta\beta} = -\frac{\nu}{1-\nu}(\sigma_1\xi + \sigma_2), \quad \sigma_{\gamma\gamma}(h) = ku_\gamma(h); \tag{7}$$

$$\sigma_{\gamma\gamma} = -(\sigma_1\xi + \sigma_2), \quad \sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\beta\gamma} = 0, \quad \sigma_{\alpha\gamma} = -\frac{h}{l}\sigma_1\frac{\nu}{1-\nu}(1-\zeta),$$

а при $\sigma_{\gamma\gamma}(h) = -\sigma_3\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2$ имеем решение

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\beta\gamma} = 0, \quad \sigma_{\gamma\gamma} = -\sigma_3\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \sigma_3\frac{h^2}{l^2}\frac{\nu}{1-\nu}(1-\zeta)^2;$$

$$\sigma_{\alpha\gamma} = -\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_1\frac{h}{l}(2\xi - 1)(1-\zeta), \quad \sigma_{\alpha\alpha} = \sigma_{\beta\beta} = -\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_3\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 - 2\sigma_3\frac{h^2}{l^2}(1+\ldots); \tag{8}$$

$$u_\alpha = -\frac{h}{l}\sigma_3(2\xi - 1)\left[\frac{4h\nu(1+\nu)}{1-\nu}k_1 + \ldots\right], \quad u_\beta = 0;$$

$$u_\gamma = -\sigma_3\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2\frac{2h(1-2\nu)(1+\nu)}{1-\nu}k_1 - \sigma_3\frac{h^2}{l^2}\left[\frac{4h(1-2\nu)(1+\nu)}{(1-\nu)^2}k_1(1-\zeta) + \ldots\right];$$

отсюда с точностью $0(\varepsilon^2)$ следует зависимость (6).

Пусть модуль упругости изменяется теперь по закону

$$E = E_1\exp(-m(\zeta - 1)), \quad \nu \approx \text{const}, \quad -1 \leqslant \zeta \leqslant 1; \tag{9}$$

тогда для первой задачи получим решение

$$\sigma_{\alpha\gamma} = \sigma^+_{\alpha\gamma}, \quad \sigma_{\beta\gamma} = \sigma^+_{\beta\gamma}, \quad \sigma_{\gamma\gamma} = -\sigma^+_{\gamma\gamma}, \quad \sigma^+_{ij} = \text{const};$$

$$\sigma_{\alpha\alpha} = -\frac{\nu}{1-\nu}\sigma^+_{\gamma\gamma}, \quad \sigma_{\beta\beta} = -\frac{\nu}{1-\nu}\sigma^+_{\gamma\gamma}, \quad \sigma_{\alpha\beta} = 0; \tag{10}$$

$$u_\alpha = 2(1+\nu)hk_2\sigma^+_{\alpha\gamma}, \quad u_\beta = 2(1+\nu)hk_2\sigma^+_{\beta\gamma};$$

$$u_\gamma = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}hk_2\sigma^+_{\gamma\gamma}, \quad k_2 = \frac{1}{E_1 m}(e^{m(\zeta-1)} - e^{-2m}).$$

Из решения (10) вытекает

$$\sigma_{\gamma\gamma}(h) = ku_\gamma(h), \quad k = k_0\frac{2m}{1 - e^{-2m}}; \tag{11}$$

зависимость отношения коэффициентов постели k/k_0 от параметра m показана на рис. 2. Таким образом, когда у основания переменный модуль упругости, коэффициент постели следует вычислять по формулам (6) или (11). Укажем, что тот же коэффициент постели получается и тогда, когда жесткий штамп вдавливается в основание. Это следует из решения задачи при условиях

$$\sigma_{\alpha\gamma}=0,\ \sigma_{\beta\gamma}=0,\ u_{\gamma}=w^{+}=\mathrm{const}\ \text{при}\ \gamma=h. \tag{12}$$

Формулы (6) и (11) позволяют экспериментально определять как коэффициент постели, так и упругие модули, используя экспериментальные значения осадки и нормального составляющего усилия.

В местах смены типа граничных условий, разрыва граничных функций и вблизи боковой поверхности приведенное выше решение, а также модель Винклера—Фусса перестают быть справедливыми. В этих местах возникают пограничные слои, где нет известной пропорциональной зависимости, и следует к полученному решению добавить решение типа погранслоя, т. е. новое решение, экспоненционально затухающее при удалении от поверхности разрыва. Пограничный слой можно изучить способом, изложенным в работе ([5]).

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Լ. Ա. ԱՂԱԼՈՎՅԱՆ, Ս. Խ. ԱԴԱՄՅԱՆ

Փոփոխական առաձգական բնութագրիչներ ունեցող հիմքերի հիմնատակային գործակցի մասին

Հիմնվելով փոփոխական առաձգական բնութագրիչներ ունեցող շերտի առաձգականության տեսության եռաչափ խնդրի լուծման վրա, դիտարկվում է առաձգական հիմքերի հիմնատակային գործակցի որոշման հարցը։ Առաձգական հիմքը դիտարկվում է որպես վերջավոր հաստության տարածական շերտ, որը դրվում է բացարձակ կոշտ փուլածքի վրա։ Ենթադրվում է, որ շերտի առաձգականության մոդուլը ֆունկցիա է ուղղաձիգ կոորդինատից։ Առաջարկվում են բանաձևեր հիմնատակային գործակցի որոշման համար, երբ առաձգականության մոդուլը փոփոխվում է ըստ հիմքի հաստության էքսպոնենցիալ կամ գծային օրենքներով։ Մասնավոր դեպքում, երբ առաձգականության մոդուլը հաստատուն է, հիմնատակային գործակցի արտահայտությունը համընկնում է հայտնի բանաձևի հետ։ Որոշվում են հիմնատակային գործակցի փոփոխման հնարավոր սահմանները։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. А. Агаловян*, в кн.: XIII Всесоюзн. конф. по теории пластин и оболочек, ч. I, Таллин, 1983. [2] *Л. А. Агаловян, Р. С. Геворкян*, в кн.: Механика конструкций из композиционных материалов, Наука, Новосибирск, 1984. [3] *В. З. Власов, Н. Н. Леонтьев.* Балки, плиты и оболочки на упругом основании, Физматгиз, М., 1960. [4] *М. И. Горбунов-Посадов, Т. А. Маликова, В. И. Соломин.* Расчет конструкций на упругом основании, Стройиздат, М., 1984. [5] *Л. А. Агаловян*, Межвуз. сб. науч. тр. Механика, вып. 3, ЕГУ, Ереван (1984).