

УДК 515.1

МАТЕМАТИКА

Э. А. Мирзаханян

# Об одном бесконечномерном обобщении теоремы Борсука о неограниченной компоненте

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 27/VI 1986)

В статье приводится одно бесконечномерное обобщение теоремы Борсука <sup>(1)</sup> о неограниченности компоненты точки дополнения  $R^n \setminus X$  замкнутого и ограниченного множества  $X \subset R^n$ . Эта классическая теорема несправедлива в бесконечномерном случае в классе всех непрерывных отображений. Вместе с тем оказывается (теорема 3), что теорема Борсука остается верной и в вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве  $H$ , если только рассматривать так называемые  $K_0$ -отображения, принадлежащие одному допустимому классу  $K_0$  непрерывных отображений подмножеств пространства  $H$ .

Определение и ряд основных свойств класса  $K_0$  приведены в <sup>(2)</sup>.

Определение. Семейство  $K_0$ -отображений  $f_t: X \rightarrow Y$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , называется  $K_0$ -гомотопией, если определенное формулой  $F(t, x) = f_t(x)$  отображение  $F$  цилиндра  $I \times X$  в  $Y$  является  $K_0$ -отображением.

Ниже через  $S$  обозначена единичная сфера гильбертова пространства  $H$ .

Лемма 1. Пусть  $A$  и  $X$  — произвольные подмножества пространства  $H$ , причем  $A \subset X$ , и пусть  $f: A \rightarrow S$  — произвольное  $K_0$ -отображение. Тогда существуют открытое в  $X$  подмножество  $U \supset A$  и  $K_0$ -отображение  $f^*: U \rightarrow S$ , являющееся продолжением  $f$ .

Лемма 2. Пусть  $A \subset X \subset H$ , причем  $A$  замкнуто в  $X$ . Пусть, далее,  $M = 0 \times X \cup I \times A$ . Тогда всякое  $K_0$ -отображение (в гильбертовом пространстве  $H^* = R \times H$ )  $F: M \rightarrow S$  может быть продолжено до  $K_0$ -отображения  $\bar{F}: I \times X \rightarrow S$ .

Теорема 1. Пусть  $A \subset X \subset H$ , причем  $A$  замкнуто в  $X$ . Пусть, далее,  $f: X \rightarrow S$  — произвольное  $K_0$ -отображение,  $g_1: A \rightarrow S$  частичная  $K_0$ -гомотопия отображения  $f$ . Тогда гомотопию  $g_1$  можно продолжить до  $K_0$ -гомотопии  $f_t: X \rightarrow S$  отображения  $f$ .

Будем называть  $K_0$ -отображение  $f: X \rightarrow S$   $K_0$ -несущественным, если оно  $K_0$ -гомотопно некоторому постоянному отображению множества  $X$  в сферу  $S$ .

Замечание 1. Отметим, что тождественное отображение  $id_S: S \rightarrow S$  является  $K_0$ -существенным <sup>(3)</sup>, хотя оно является несущественным в классе всех непрерывных отображений.

Следствие 1. Пусть  $A \subset X \subset H$ , причем  $A$  замкнуто в  $X$ .

Тогда любое  $K_0$ -несущественное отображение  $f: A \rightarrow S$  можно продолжить до  $K_0$ -несущественного отображения  $f^*: X \rightarrow S$ .

Пусть теперь  $X$  — произвольное замкнутое и ограниченное подмножество пространства  $H$  и пусть  $G = H \setminus X$ . Для каждой точки  $x_0 \in G$  определим отображение  $p_{x_0}: X \rightarrow S$ , положив

$$p_{x_0}(x) = \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}.$$

Так как отображение  $p_{x_0}$  представимо в виде композиции двух  $K_0$ -отображений, то оно также будет  $K_0$ -отображением.

**Теорема 2.** Пусть  $X$  — замкнутое и ограниченное подмножество  $H$ , а  $G = H \setminus X$ . Тогда точки  $x_0$  и  $x_1$  множества  $G$  принадлежат одной и той же компоненте множества  $G$  в том и только в том случае, когда отображения  $p_{x_0}, p_{x_1}: X \rightarrow S$   $K_0$ -гомотопны.

**Следствие 2.** Если замкнутое и ограниченное подмножество  $X$  пространства  $H$  обладает тем свойством, что всякое  $K_0$ -отображение  $f: X \rightarrow S$  является  $K_0$ -несущественным, то множество  $X$  не разбивает пространство  $H$ , т. е.  $H \setminus X$  связно.

**Теорема 3.** Пусть  $X$  — замкнутое и ограниченное подмножество пространства  $H$  и  $G = H \setminus X$ . Точка  $x_0 \in G$  принадлежит неограниченной компоненте множества  $G$  в том и только в том случае, когда определенное формулой  $p_{x_0}(x) = \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}$  отображение

$p_{x_0}: X \rightarrow S$   $K_0$ -несущественно.

**Следствие 3.** Пусть  $S^*$  — единичная сфера гильбертова пространства  $H^* = R \times H$  и пусть  $X \subset S^*$  — замкнутое подмножество, для которого всякое  $K_0$ -отображение множества  $X$  в сферу  $S$  является  $K_0$ -несущественным. Тогда  $X$  не разбивает сферу  $S^*$ .

**Замечание 2.** Отметим, что не только утверждение теоремы 3 (как уже отмечалось выше), но и утверждение теоремы 2 не имеют места в пространстве  $H$  в классе всех непрерывных отображений. В самом деле, в этом классе сфера  $S$  стягиваема по себе в точку, и потому любое непрерывное отображение множества  $x$  в  $S$  несущественно, в частности, отображение  $p_{x_0}: X \rightarrow S$  несущественно для любой точки  $x_0 \in H \setminus X$ . Далее, если  $X = S$  и  $x_0 = 0$ , то  $p_{x_0} = id_S$  и  $p_{x_0}$  несущественно, хотя точка 0 принадлежит ограниченной компоненте множества  $H \setminus S$ .

Ереванский государственный университет

Է. Ա. ՄԻՐԶԱԽԱՆՅԱՆ

Անսահմանափակ կոմպոնենտի վերաբերյալ Բորսուկի թեորեմի մի անվերջ շարքի ընդհանրացման մասին

էվկլիդեսյան տարածության փակ և սահմանափակ  $X$  բազմության  $R^n \setminus X$  արտաքին կետի կոմպոնենտի անսահմանափակության մասին Բորսուկի կլասիկ թեորեմը դադարում է ճիշտ լինելուց հիսթերոսյան տարածությունում:

Սակայն պարզվում է, որ այդ թեորեմը մնում է ճիշտ իրական սեպարարել հիլբերտյան  $H$  տարածության համար, եթե միայն դիտարկվեն  $H$  տարածության ենթաբազմությունների անընդհատ արտապատկերումների մի թույլատրելի դասին պատկանող արտապատկերումները:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> И. Стинрод, С. Эйленберг, Основания алгебраической топологии, Изд-во физ.-мат. лит., М., 1958. <sup>2</sup> В. Г. Болтянский, ДАН АрмССР, 51, № 3 (1970). <sup>3</sup> Э. А. Мирзаханян, ДАН АрмССР, 79, № 1 (1984).