ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXIV 1987 3

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

А. Г. Балакян

Граничные теоремы единственности аналитических функций в бесконечносвязных областях

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. У. Аракеляном 8/V 1986)

В работе ([1]) А. А. Гончар выделил класс «канонических» бесконечносвязных областей, названных им областями типа L, и для них установил метрические признаки единственности и неединственности аналитических функций.

В настоящей работе вопрос единственности исследуется для более общего класса областей.

Определение 1. Пусть $K(a, r)$—открытый круг радиуса r с центром a. Рассмотрим односвязную область $\Omega\subset\mathbb{C}$, $\partial\Omega\neq\varnothing$, и пусть $\{K_j\}_1^\infty$—система кругов $K_j=K(z_j, r_j)$ такая, что $K_j\subset\Omega$, $\overline{K}_i\cap\overline{K}_j=\varnothing$ при $i\neq j$ и $\{z_j\}'=\partial\Omega$. Тогда бесконечносвязную область $D=D(\{z_j, r_j\}_1^\infty)=\Omega\setminus\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\overline{K}_j$ назовем областью типа L в Ω. Круги K_j называются исключительными кругами области D.

В случае $\Omega=K(0, 1)$ это определение совпадает с определением А. А. Гончара областей типа L.

Определение 2. Пусть D—область типа L в Ω, $\rho(z, \partial\Omega)$—сферическое расстояние между точкой z и множеством $\partial\Omega$. Скажем, что D обладает свойством единственности (соответственно B-единственности), если из условий, что f голоморфна в D (соответственно f голоморфна и ограничена в D) и

$$f(z)\to 0 \text{ при } \rho(z, \partial\Omega)\to 0,\ z\in D, \tag{1}$$

следует, что $f\equiv 0$.

В работе автора ([2]) было приведено доказательство следующего метрического критерия единственности для областей типа L, указанного А. А. Гончаром ([1]).

Пусть $D=D(\{z_j, r_j\}_1^\infty)$—область типа L (в $K(0, 1)$). Если

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1-|z_j|}{\log\dfrac{1-|z_j|^2}{r_j}}<\infty, \tag{2}$$

то область D обладает свойством единственности.

В настоящей заметке доказывается следующее обобщение этого результата.

Теорема. *Пусть Ω—выпуклая область в* $\mathbb{C}$, $\Omega\neq\mathbb{C}$, $D=$

$=D(\{z_j, r_j\}_1^\infty)$ — *область типа* L *в* Ω, d_j — *расстояние точки* z_j *до* $\partial\Omega$.

Если

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{d_j}{(|z_j|+1)\left(1+\log\frac{d_j}{r_j}\right)} < \infty, \tag{3}$$

то область D *обладает свойством единственности.*

Доказательство. Сначала приведем формулировку одной нужной здесь леммы, доказательство которой может быть проведено аналогично доказательству леммы 1 из работы ([2]).

Лемма. *Пусть* D_1 *и* D_2 *являются областями типа* L *в* Ω *с конечным числом несовпадающих исключительных кругов. Тогда эти области обладают (не обладают) свойством единственности и B-единственности одновременно.*

Переходя к доказательству теоремы, зафиксируем точку $a \in D$ и положим $\varepsilon = \inf \frac{|z_j - a|}{|z_j|+1} > 0$.

Натуральное число N выберем так, чтобы выполнялись условия

$$\sum_{j=N}^{\infty} \frac{d_j}{(|z_j|+1)\left(1+\log\frac{d_j}{r_j}\right)} < \frac{\varepsilon}{8},$$

$$|z_j - a| > 2d_j, \ j \geq N. \tag{4}$$

Из первого условия следует, что

$$\sum_{j=N}^{\infty} \frac{d_j}{|z_j - a|\left(1+\log\frac{d_j}{r_j}\right)} < \frac{1}{8}. \tag{5}$$

Применяя лемму к областям D и $D_N = D(\{z_j, r_j\}_N^\infty)$, мы заключаем, что без ограничения общности можно полагать $D = D_N$, т. е. $N=1$, и остается доказать, что при этом условия (4) и (5) гарантируют свойство единственности области D.

Пусть функция $f \in H(D)$ ($H(D)$ — класс голоморфных в D функций) удовлетворяет условию (1). Тогда f ограничена в некоторой окрестности $\partial\Omega$, и, чуть расширяя конечное число исключительных кружков области D (так, чтобы условия (4) и (5) сохранились), можно считать, что $f \in H_B(D)$ ($H_B(D)$ — класс голоморфных и ограниченных в D функций).

Мы хотим доказать, что $f=0$. С этой целью воспользуемся следующим следствием из теоремы о двух константах ([3]).

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — область, $F \subset \partial D$ замкнутое множество такое, что гармоническая мера $\omega(z, F, D)$ положительна. Если функция $f \in H_B(D)$ удовлетворяет условию $f(z) \to 0$ при $\rho(z, D) \to 0$, $z \in D$, то тогда $f \equiv 0$.

Поскольку положительность гармонической меры не зависит от выбора точки z, то достаточно показать, что из условий (5) и (4) следует соотношение $\omega(a, \partial\Omega, D) > 0$.

Полагая $G_j = \Omega \setminus \overline{K}_j$, $\omega_j(z) = \omega(z, \partial K_j, G_j)$, $j = 1, 2, \ldots$, рассмотрим

функцию $v(z)=\sum_{j=1}^{\infty}\omega_j(z)$. По теореме Гарнака, функция v либо тождественно равна $+\infty$, либо гармонична в D. В обоих случаях, очевидно, выполняются соотношения

$$\varliminf_{z\to\zeta} v(z)\geqslant 1 \quad \text{для} \quad \zeta\in\bigcup_{j=1}^{\infty}\partial K_j, \tag{6}$$

$$\varliminf_{z\to\zeta} v(z)\geqslant 0 \quad \text{для} \quad \zeta\in\partial\Omega. \tag{7}$$

Сопоставляя функции $\omega\left(z, \bigcup_{j=1}^{\infty}\partial K_j, D\right)$ и $v(z)$ и учитывая, что первая из них является обобщенным решением задачи Дирихле (см. ([4])) с предельными значениями 0 на $\partial\Omega$ и 1 на $\bigcup_{j=1}^{\infty}\partial K_j$, из (6) и (7) получаем, что $\omega\left(z, \bigcup_{j=1}^{\infty}\partial K_j, D\right)\leqslant v(z)$ для $z\in D$, откуда $\omega(z, \partial\Omega, D)\geqslant$ $\geqslant 1-\sum_{j=1}^{\infty}\omega_j(z)$ для $z\in D$.

Из этой оценки с учетом вышесказанного и из (5) следует, что теорема будет доказана, если мы сумеем установить оценку

$$\omega_j(a)\leqslant\frac{8d_j}{|z_j-a|\left(1+\log\dfrac{d_j}{r_j}\right)}, \quad j=1, 2, \ldots \tag{8}$$

Пусть точка $\zeta_j\in\partial\Omega$ такая, что $|z_j-\zeta_j|=d(z_j, \partial\Omega)$. Проведем через точку ζ_j ту опорную прямую выпуклой области Ω (см. ([5])), которая перпендикулярна к отрезку $[z_j, \zeta_j]$. Полуплоскость, образованная указанной опорной прямой и содержащая точку z_j, содержит также и область Ω. Эту полуплоскость с удаленным кругом $\overline{K}_j$ обозначим через G_j'. Очевидно, $G_j\subset G_j'$. По принципу Карлемана расширения области ([6]) имеем

$$\omega_j(a)\leqslant\omega(a, \partial K_j, G_j')\leqslant\sup_{z\in l_j}\omega(z, \partial K_j, G_j'), \tag{9}$$

где $l_j=\partial K(z_j, |z_j-a|)\cap G_j'$.

С помощью параллельного переноса и поворота, оставляющих гармоническую меру инвариантной, можно без ограничения общности считать, что $G_j'=\Pi\setminus\overline{K}_j$, где Π—правая полуплоскость и $z_j=d_j$, т. е. $K_j=K(d_j, r_j)$. Далее рассмотрим два случая.

а. Пусть сначала $r_j<\dfrac{d_j}{2}$. Полагая $w=\dfrac{z-d_j}{z+d_j}$, имеем, что $|w|\leqslant$ $\leqslant\dfrac{2r_j}{3d_j}=r_j'$ при $z\in\partial K_j$.

Дробно-линейное преобразование $z\to w$, отображающее Π на $K(0, 1)$, переводит G_j' в область, содержащую кольцо $\{z; r_j'<|z|<1\}$. Применяя опять принцип Карлемана, имеем

$\omega(z, \partial K_j, G_j') < \dfrac{\log \frac{1}{|w|}}{\log \frac{1}{r_j'}}$. Далее учитывая, что $\log \frac{1}{|w|} \leqslant \frac{2d_j}{|z_j - a|}$ при $z \in l_j$, $\log \frac{1}{r_j'} > \log \frac{3}{2}\left(1 + \log \frac{d_j}{r_j}\right) > \frac{1}{3}\left(1 + \log \frac{d_j}{r_j}\right)$, получаем

$$\sup_{z \in l_j} \omega(z, \partial K_j, G_j) \leqslant \frac{6d_j}{|z_j - a|\left(1 + \log \frac{d_j}{r_j}\right)}.$$

Отсюда с учетом (9) следует (8)

б. Пусть теперь $r_j \geqslant \frac{d_j}{2}$. Тогда $G_j' \supset G_j'' = \Pi \setminus \overline{K}(d_j, d_j)$ и по принципу Карлемана имеем

$$\omega(z, \partial K_j, G_j') \leqslant \omega(z, \partial K(d_j, d_j), G_j''), \quad z \in G_j''. \tag{10}$$

Чтобы оценить последнюю гармоническую меру, область G_j'' при помощи функции $w = \frac{1}{z}$ конформно отобразим на полосу $G_j''' = \left\{w;\ 0 < \operatorname{Re} w < \frac{1}{2d_j}\right\}$.

При этом окружность $\partial K(d_j, d_j)$ переходит в прямую $\gamma_j = \left\{w, \operatorname{Re} w = \frac{1}{2d_j}\right\}$. Имеем $\omega(z, \partial K(d_j, d_j), G_j'') = \omega(w, \gamma_j, G_j''') = 2d_j \operatorname{Re} w \leqslant \frac{2d_j}{|z|}$, $z \in G_j''$, Далее, учитывая (4), получаем

$$\frac{1}{|z|} \leqslant \frac{1}{|z - d_j| - d_j} = \frac{1}{|z_j - a| - d_j} \leqslant \frac{2}{|z_j - a|} \leqslant \frac{4}{|z_j - a|\left(1 + \log \frac{d_j}{r_j}\right)}, \quad z \in l_j.$$

Отсюда с учетом (10) и (9) получаем (8). Теорема доказана.

Заметим, что в случае $\Omega = K(0, 1)$ условие единственности (3) равносильно условию (2).

Следствие. *Условие* (3) *теоремы можно заменить более строгим условием* $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{d_j}{|z_j| + 1} < +\infty$, *не зависящим от радиусов исключительных кружков. В частности, в случае* $\Omega = K(0, 1)$ *условие Бляшке* $\sum_{j=1}^{\infty} (1 - |z_j|) < +\infty$ *достаточно для того, чтобы область* D *обладала свойством единственности. В случае же, когда* Ω *— правая полуплоскость, мы имеем достаточное условие* $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} z_j}{|z_j| + 1} < +\infty$.

В заключение приношу глубокую благодарность Н. У. Аракеляну за ценные советы и обсуждения.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Հ. Գ. ԲԱԼԱՔՅԱՆ

Անվերջ-կապանի տիրույթներում անալիտիկ ֆունկցիաների եզրային միակության թեորեմներ

Աշխատանքում բերված է Ω-ում L տիպի տիրույթների համար միակության հետևյալ հայտանիշը.

Թեորեմ. Դիցուք Ω-ն ուռուցիկ տիրույթ է C-ում, $\Omega \neq C$, $D=D(\{z_j, r_j\}_1^\infty)$ տիրույթը Ω-ում L. տիպի է, d_j-ն՝ z_j կետի հեռավորությունն է ∂Ω-ից։ Եթե

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{d_j}{(|z_j|+1)\left(1+\log \frac{d_j}{r_j}\right)} < +\infty,$$

ապա D տիրույթը օժտված է միակության հատկությամբ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. А. Гончар.* Вестн. Моск. ун-та, № 1, 1964. [2] *А. Г. Балакян*, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 20, № 2 (1985). [3] *Р. Неванлинна*, Однозначные аналитические функции, Гостехиздат, М.—Л., 1941. [4] *М. Брело*, Основы классической теории потенциала, Мир, М., 1964. [5] *Б. Я. Левин*, Распределение корней целых функций, Гостехиздат, М., 1956. [6] *Г. М. Голузин*, Геометрическая теория функций комплексного переменного, Наука, М., 1977.