ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXIV 1987 3

УДК 519.21

МАТЕМАТИКА

Р. Г. Сафарян

# Об одном классе случайных процессов и соответствующих системах дифференциальных уравнений

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. В. Амбарцумяном 23/IV 1986)

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u_k(t, x)}{\partial t} = L_k u_k(t, x) + \sum_{j=1}^{n} c_{kj} u_j(t, x), \ t > 0, \ x \in D \subseteq R^r$$

$$k = 1, 2, \ldots, n, \ u_k(0, x) = g_k(x). \tag{1}$$

Если область $D$ не совпадает с $R^r$, то мы предполагаем, что $\partial D$-граница области $D$ есть гладкое многообразие. В (1)

$$L_k = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{r} a_k^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^{r} b_k^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

эллиптические, быть может, вырождающиеся операторы с достаточно гладкими коэффициентами (например, достаточно, чтобы $a_k^{ij}$, $b_k^i \in C^2$); функции $g_k(x)$ непрерывны и ограничены. Предположим, что $c_{ij}(x) \geqslant 0$, если $i \neq j$. В случае ограниченной области $D$ мы будем к (1) добавлять граничные условия Дирихле

$$u_k(t, x)|_{x \in \partial D} = \psi_k(x), \ k = 1, 2, \ldots, n \tag{2}$$

или условие Неймана

$$\left.\frac{\partial u_k(t, x)}{\partial n_k}\right|_{x \in \partial D} = 0, \ k = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

где $n_k(x)$—вектор внешней нормали к $\partial D$ для оператора $L_k$. В случае условия (3) считается, что операторы $L_k$ равномерно эллиптичны.

С задачами (1), (2) и (1), (3) связаны случайные марковские процессы $(X_t, \nu_t)$ и $(Z_t, \nu_t)$ соответственно (см. [1,2]). В первом случае это процесс в $R^r \times \{1, 2, \ldots, n\}$. Компонента $X_t$—решение стохастического уравнения $dX_t = \sigma_{\nu_t}(X_t) dW_t + b_{\nu_t}(X_t) dt$, где $\sigma_k \sigma_k^* = (a_k^{ij})$, $b_k = (b_k^1, \ldots, b_k^n)$. Компонента $\nu_t$ представляет собой скачкообразный процесс на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$. Причем $P\{\nu_{t+\Delta} = j / \nu_t = i, X_t\} = c_{ij}(X_t)\Delta + o(\Delta)$, $\Delta \downarrow 0$.

В случае задачи (1)—(3) процесс $\nu_t$ определяется так же, только нужно $X_t$ заменить на $Z_t$, а $Z_t$— процесс, определяемый тем же уравнением, что $X_t$ внутри $D$ и претерпевающий отражение на границе по конормали $n_{\nu_t}(x)$.

Решения задач (1)—(2) и (1)—(3) представимы в виде средних значений функционалов от процессов $(X_t, \nu_t)$ и $(Z_t, \nu_t)$ соответственно. Например, решение задачи (1)—(3) имеет вид

$$u_k(t, x) = E_{x,k} g_{\nu_t}(Z_t) \exp\left\{\int_0^t c_{\nu_s}(Z_s) ds\right\}; \tag{4}$$

индексы $x$, $k$ у математического ожидания $E$ означают, что

$$Z_0 = x, \ \nu_0 = k, \ c_i(x) = \sum_j c_{ij}(x).$$

В работах ([1,2]) исследуется задача (1)—(3) и задачи Коши ($D = R^r$) в случае, когда $c_{ij} = \frac{1}{\varepsilon} \hat{c}_{ij}$, $\varepsilon \downarrow 0$, $i \neq j$, все остальные коэффициенты имеют порядок 1.

Здесь приведем результаты (теоремы 1—3), полученные нами относительно некоторых других задач с малым параметром. Как правило, мы ограничиваемся простейшими ситуациями: переход к большему числу уравнений или к переменным коэффициентам не представляет принципиальных трудностей.

2. Случай, когда коэффициенты одного уравнения велики по сравнению с коэффициентами других уравнений. Пусть для краткости $n = 2$ и рассмотрим систему

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u_1^\varepsilon(t, x)}{\partial t} = L_1 u_1^\varepsilon(t, x) + c_{11}(x) u_1^\varepsilon(t, x) + c_{12}(x) u_2^\varepsilon(t, x), \\
\frac{\partial u_2^\varepsilon(t, x)}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon}\left[L_2 u_2^\varepsilon + c_{21}(x)(u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon)\right], \ t > 0, \ x \in D, \\
\left.\frac{\partial u_1^\varepsilon(t, x)}{\partial n_1}\right|_{\partial D} = \left.\frac{\partial u_2^\varepsilon(t, x)}{\partial t}\right|_{\partial D} = 0, \ u_1^\varepsilon(0, x) = g_1(x), \ u_2^\varepsilon(0, x) = g_2(x).
\end{gathered} \tag{5}$$

Мы считаем для краткости $c_{22} = -c_{21} = \text{const} < 0$. Соответствующий процесс $(Z_t^\varepsilon, \nu_t^\varepsilon)$ устроен при малых $\varepsilon$ следующим образом: в „основном" $\nu_t^\varepsilon = 1$, так как $\frac{c_{21}(x)}{\varepsilon} \gg 1$. Поэтому процесс $Z_t^\varepsilon$ при $\varepsilon \downarrow 0$ приближается к процессу, имеющему непрерывную составляющую, которая представляет собой процесс, соответствующий оператору $L_1$ с отражением на $\partial D$, на которую „налагаются" скачки. Интенсивность этих скачков определяется функциями $c_{12}$ и $c_{21}$, а величина скачка определяется оператором $L_2$. Таким образом, компонента $Z_t^\varepsilon$ при $\varepsilon \downarrow 0$ сходится к скачкообразному марковскому процессу.

Теорема 1. *Пусть выполнены перечисленные выше условия. Тогда для решения задачи* (5) *справедливы соотношения* $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} u_1^\varepsilon(t, x) = \lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} u_2^\varepsilon(t, x) = u(t, x)$, *где* $u(t, x)$ — *решение следующей задачи:*

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=L_1u(t,x)+c_{12}\Big[\int\limits_D\int\limits_0^\infty P_2(s,x,y)e^{-c_{21}s}u(t,y)dsdy-$$

$$-u(t,x)\Big]+c_{11}(x)u(t,x),$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n_1}\right|_{\partial D}=0,\quad u(0,x)=g_1(x), \tag{8}$$

*где* $P_2(s,x,y)$ — *фундаментальное решение задачи* $\frac{\partial P_2}{\partial s}=L_2P_2$, $\left.\frac{\partial P_2}{\partial n_2}\right|_{\partial D}=0$, $s>0$, $x\in D$. *В предположении гладкости коэффициентов и границы области решение задачи* (6) *существует и единственно для любой непрерывной начальной функции* $g_1(x)$.

Рассмотрим теперь случай, когда коэффициенты второго уравнения больше по сравнению с коэффициентами первого уравнения, но имеют разный порядок:

$$\frac{\partial u_1^{\varepsilon,\delta}(t,x)}{\partial t}=L_1u_1^{\varepsilon,\delta}+c_{12}(x)(u_2^{\varepsilon,\delta}-u_1^{\varepsilon,\delta}),$$

$$\frac{\partial u_2^{\varepsilon,\delta}(t,x)}{\partial t}=\frac{1}{\varepsilon}L_2u_2^{\varepsilon,\delta}+\frac{1}{\delta}c_{21}(u_1^{\varepsilon,\delta}-u_2^{\varepsilon,\delta}), \tag{7}$$

$$t>0,\ x\in D,\ \left.\frac{\partial u_1^{\varepsilon,\delta}}{\partial n_1}\right|_{\partial D}=\left.\frac{\partial u_2^{\varepsilon,\delta}}{\partial n_2}\right|_{\partial D}=0,\qquad 0<\varepsilon,\ \delta\ll 1.$$

Здесь ситуация различна в случаях $\delta\ll\varepsilon\ll 1$ и $\varepsilon\ll\delta\ll 1$.

Теорема 2. *Для решения задачи* (7) *выполняются соотношения:*

$$\lim_{\varepsilon,\delta\downarrow 0}u_1^{\varepsilon,\delta}(t,x)=\lim_{\varepsilon,\delta\downarrow 0}u_2^{\varepsilon,\delta}(t,x)=u(t,x).$$

*Если* $\varepsilon,\delta\downarrow 0$ *так, что* $\varepsilon\delta^{-1}\to 0$, *то* $u(t,x)$ — *решение следующей задачи:*

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=L_1u+c_{12}(x)\int\limits_D[u(t,y)-u(t,x)]m_2(y)dy$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n_1}\right|_{\partial D}=0,\ u(0,x)=g_1(x).$$

*Здесь* $m_2(x)$ — *плотность инвариантной меры процесса, соответствующего оператору* $L_2$ *в* $D$, *с отражением на границе области вдоль* $n_2(x)$.

*Если* $\varepsilon,\delta\downarrow 0$ *так, что* $\varepsilon\cdot\delta^{-1}\to\infty$, *то* $u(t,x)$ — *решение задачи*

$$\frac{\partial u}{\partial t}=L_1u,\ u(0,x)=g_1(x),\ x\in D,\ \left.\frac{\partial u}{\partial n_1}\right|_{\partial D}=0.$$

3. Рассмотрим задачу Дирихле для системы с малым параметром:

$$L_1u_1^\varepsilon(x)+c_{12}(u_2(x)-u_1(x))=0,$$

$$L_2 u_2^\varepsilon(x) + \frac{1}{\varepsilon} c_{21}(u_1^\varepsilon(x) - u_2^\varepsilon(x)) = 0, \tag{8}$$

$$x \in D, \ c_{12}, \ c_{21} > 0.$$

К системе (8) следует добавить граничные условия. Мы рассмотрим сейчас случай, когда $L_1 = \sum_{i=1}^{r} b_1^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$; $L_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{r} a_2^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^{r} b_2^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$. Будем считать коэффициенты операторов достаточно гладкими, область $D$ ограниченной. Пусть векторное поле $b_1(x) = (b_1^1(x), \ldots, b_1^r(x))$ таково, что его интегральные кривые притягиваются к точке $0 \in D$, исходя из любой точки $x \in D \cap \partial D$, причем всюду на $\partial D$ поле $b_1(x)$ направлено строго внутрь области $D$. Оператор $L_2$-эллиптичен при $x \in D \cap \partial D$. При сделанных выше предположениях относительно операторов $L_1$ и $L_2$, чтобы выделить единственное решение задачи (8), следует задать граничное условие

$$u_2(x)\big|_{x \in \partial D} = \psi(x). \tag{9}$$

Это решение можно записать в виде

$$u_k^\varepsilon(x) = E_{x,k} \psi(X_{\tau^\varepsilon}^\varepsilon), \tag{10}$$

где $\tau^\varepsilon$—момент первого достижения процессом $X_t^\varepsilon$ границы $\partial D$ области $D$. Из предположений относительно $L_1$ следует, что этот выход из области может произойти только при $\nu_t^\varepsilon = 2$. Поэтому для $u_1^\varepsilon(x)$ граничных условий задавать не нужно. Процесс $\nu_t^\varepsilon$ преимущественное время проводит в состоянии 1, а $X_t^\varepsilon$—вблизи точки 0. Лишь на небольшое (порядка $\varepsilon$ при $\varepsilon \downarrow 0$) время $\nu_t^\varepsilon$ переходит в состояние 2 и быстро возвращается назад. Однако выход из $D$ может произойти только за счет времени, проведенного компонентой $\nu_t^\varepsilon$ в состоянии 2 Из результатов ([2]) (см. также ([3])) следует, что за малое время наиболее вероятной точкой первого выхода из $D$, исходя из точки 0 для процесса, соответствующего оператору $L_2$, будет точка $x_0 \in \partial D$, ближайшая к 0 в метрике $\rho(x, y)$, соответствующей метрическому тензору $ds^2 = \sum a_{ij}(x)\, dx^i dx^j$. Здесь $(a_{ij}(x)) = (a_2^{ij}(x))^{-1}$. На основании этих соображений, с помощью рассуждений, аналогичных использованным при доказательстве теоремы 2.1 гл. 4 из ([3]), получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть выполняются предположения, сделанные выше в этом параграфе. Пусть, кроме того, существует единственная точка $x_0 \in \partial D$, для которой $\rho(x_0, 0) = \min\{\rho(x, 0), x \in \partial D\}$, и предположим, что*

$$(\nabla \rho(x, 0), b_1(x)) < 0 \ \textit{при} \ \rho(x, 0) < \rho(x_0, 0).$$

*Тогда* $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} u_k^\varepsilon(x) = \psi(x_0)$; $k = 1, 2$.

Армянский педагогический институт им. Х. Абовяна

Ռ. Ֆ. ՍԱՖԱՐՅԱՆ

## Պատահական պրոցեսների մի դասի և համապատասխան դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի մասին

*Դիտարկվում են եզրային խնդիրներ փոքր պարամետրով որոշ դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի համար։ Համապատասխան պատահական պրոցեսների հետագծերի վարքի քննարկման միջոցով ուսումնասիրվում է այդ խնդիրների լուծումների վարքը, երբ փոքր պարամետրը ձգտում է զրոյի։*

### ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. В. Сарафян*, ДАН АрмССР, т. 81, № 4 (1986). [2] *S. R. S. Varadhan*, Comm. Pure Appl. Math., v. 20 p. 659—685 (1967). [3] *А. Д. Вентцель, М. И. Фрейдлин*, Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений, Наука, М., 1979.