ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXIV 1987 2

УДК 539,3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Н. А. Матехин

О прямом методе потенциала в теории упругости

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 3/VI 1985)

В статье предлагаются новые интегральные уравнения задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа первой пространственной и основных плоских задач теории упругости. Уравнения построены таким образом, что алгебраически находятся граничные значения любых величин первого дифференциального порядка непосредственно по решениям. В задачах теории упругости это дает граничные напряжения: отметим, что знание граничных значений производных гармонической функции требуется в задачах гидромеханики. Неизвестные величины предлагаемых уравнений очевидным образом связаны с решениями соответствующих краевых задач, поэтому в процессе решения легко использовать дополнительную информацию, например, асимптотику в окрестности нерегулярностей. Уравнения, как правило, имеют простую и хорошо изученную структуру, что позволяет использовать разработанные численные схемы и, после небольших изменений, готовые пакеты программ.

В работе используется прямой метод потенциала: для некоторой системы в частных производных строятся формулы Грина, фундаментальные решения, интегральные представления; предельный переход приводит к уравнениям. В качестве исходных служат системы первого порядка, полученные из уравнения Лапласа или системы Ламе. В плоской задаче теории упругости используется постановка, данная в ([1]). Рассматриваются односвязные области с ляпуновскими границами.

I. Вводя переменные $u_i=\sigma_{,i}$, запишем плоское уравнение Лапласа $\Delta\sigma=0$ в виде системы $u_{1,1}+u_{2,2}=0$; $u_{1,2}-u_{2,1}=0$. Формула Грина будет иметь вид:

$$\int\limits_{\Omega}\left[\begin{pmatrix}u_{1,1}+u_{2,2}\\ u_{1,2}-u_{2,1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha_{,1}+\beta_{,2}\\ \alpha_{,2}-\beta_{,1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}\right]d\Omega=\int\limits_{\Gamma}\left[\alpha\frac{\partial\sigma}{\partial n}-\beta\frac{\partial\sigma}{\partial s}\right]d\Gamma;\quad \bar{s}=\begin{pmatrix}-n_2\\ n_1\end{pmatrix}.$$

Фундаментальное решение сопряженной системы $E=-\dfrac{1}{2\pi r}\begin{pmatrix}e_1 & e_2\\ e_2 & -e_1\end{pmatrix}$ (здесь введены обозначения $r_i=x_i-y_i$, $e_i=r_i/r$) позволяет получить интегральные представления

$$\sigma_{,1}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\left[\frac{\partial\sigma}{\partial n}\frac{e_1}{r}-\frac{\partial\sigma}{\partial s}\frac{e_2}{r}\right]d_x\Gamma;\quad \sigma_{,2}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\left[\frac{\partial\sigma}{\partial n}\frac{e_2}{r}+\frac{\partial\sigma}{\partial s}\frac{e_1}{r}\right]d_x\Gamma.$$

Отсюда после предельного перехода получаем

$$\frac{\partial\sigma}{\partial n}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial\sigma}{\partial n}\frac{\partial\ln r}{\partial n y}d_x\Gamma=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial\sigma}{\partial s}\frac{\partial\ln r}{\partial s_y}d_x\Gamma; \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial s}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial\sigma}{\partial s}\frac{\partial\ln r}{\partial n_y}d_x\Gamma=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial\sigma}{\partial n}\frac{\partial\ln r}{\partial s_y}d_x\Gamma. \qquad (2)$$

Аналогичный подход к уравнению Лапласа в пространстве приводит к переопределенной системе $u_{1,1}+u_{2,2}+u_{3,3}=0$, $u_{1,2}-u_{2,1}=0$, $u_{1,3}-u_{3,1}=0$, $u_{2,3}-u_{3,2}=0$. Из первых трех уравнений получим представление для u_1, из первого, второго и четвертого — для u_2, первого, третьего и четвертого — для u_3:

$$\nabla\sigma=\int\limits_{\Gamma}\left[\nabla F\frac{\partial\sigma}{\partial n}+\nabla F\times(\nabla\sigma\times\overline{n})\right]d_x\Gamma,\qquad F\equiv-\frac{1}{4\pi r}.$$

После домножения на $\overline{n}$ и предельного перехода имеем уравнение

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial n}+\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial\sigma}{\partial n}\frac{\partial F}{\partial n_y}d_x\Gamma=-\int\limits_{\Gamma}(\nabla\sigma\times\overline{n})\cdot(\nabla F\times\overline{n}_y)d_x\Gamma, \qquad (3)$$

для задачи Неймана — систему

$$\frac{1}{2}(\nabla\sigma\times\overline{n})+\int\limits_{\Gamma}\left\{(\nabla\sigma\times\overline{n})\frac{\partial F}{\partial n_y}+\nabla F[(\nabla\sigma\times\overline{n})\cdot\overline{n}_y]\right\}d_x\Gamma=\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial\sigma}{\partial n}(\nabla F\times\overline{n}_y)d_x\Gamma. \quad (4)$$

Вводя ортонормированные координаты на поверхности тела $(\overline{t}^1\times\overline{t}^2=\overline{n})$, запишем иную систему для задачи Неймана:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial t^1}+\int\limits_{\Gamma}\left[\frac{\partial\sigma}{\partial t^1}\nabla F\cdot(\overline{t}^2\times\overline{t}^1_y)+\frac{\partial\sigma}{\partial t^2}\nabla F\cdot(\overline{t}^1\times\overline{t}^1_y)\right]d_x\Gamma=-\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial\sigma}{\partial n}\frac{\partial F}{\partial t^1_y}d_x\Gamma;$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial t^2}+\int\limits_{\Gamma}\left[\frac{\partial\sigma}{\partial t^1}\nabla F\cdot(\overline{t}^2\times\overline{t}^2_y)-\frac{\partial\sigma}{\partial t^2}\nabla F\cdot(\overline{t}^1\times\overline{t}^2_y)\right]d_x\Gamma=-\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial\sigma}{\partial n}\frac{\partial F}{\partial t^2_y}d_x\Gamma. \quad (5)$$

Интегральные операторы уравнений (1), (2), (3) совпадают с операторами уравнений внешней задачи Неймана в теории потенциала. Следовательно, предлагаемые уравнения расположены не на спектре, для них сходится ряд последовательных приближений. Системы (4), (5) классических аналогов не имеют, однако определитель и главные миноры символических матриц этих систем равны единице; индексы равны нулю. Система (5) имеет слабую особенность.

II. В случае плоской деформации, сославшись на ([1]), рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned}R_{1,1}-R_{2,2}&=0\\ \Delta\sigma&=0\\ R_{1,2}+R_{2,1}&=0\end{aligned}\right\},\quad R_i\equiv\sigma_{ij,j};\ \sigma=\sigma_{11}+\sigma_{22},$$

с граничными условиями $R_i=0$; $\sigma_{ij}n_j=p_i$. Получаем представления:

$$\sigma_{12}=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Gamma}\left[e_1e_2\frac{\partial\sigma}{\partial n}-\sigma\frac{\partial}{\partial n}(e_1e_2)\right]d_x\Gamma+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{p_1e_2+p_2e_1}{r}\,d_x\Gamma;$$

$$\sigma_{11}=\frac{\sigma}{2}+\frac{1}{8\pi}\int\limits_{\Gamma}\left[\sigma\frac{\partial}{\partial n}(e_2^2-e_1^2)-(e_2^2-e_1^2)\frac{\partial\sigma}{\partial n}\right]d_x\Gamma+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{p_1e_1-p_2e_2}{r}\,d_x\Gamma.$$

От нормальных производных избавляемся, интегрируя по частям:

$$\int\limits_{\Gamma} e_1^2\frac{\partial\sigma}{\partial n}d_x\Gamma=-\int\limits_{\Gamma} e_1^2\frac{\partial\tau}{\partial s}d_x\Gamma=\int\limits_{\Gamma}\tau\frac{\partial e_1^2}{\partial s}d\Gamma;\quad \tau\equiv\frac{2\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}(u_{1,2}-u_{2,1}).$$

Введем величины $q_1=\sigma n_1+\tau n_2$; $q_2=\sigma n_2-\tau n_1$. Тогда на границе $\sigma=\bar{q}\cdot\bar{n}$

$$\sigma_{11}=p_1n_1-p_2n_2+\sigma n_2^2;\quad \sigma_{12}=p_1n_2+p_2n_1-\sigma n_1n_2.$$

Кроме того, если $\bar{t}\equiv 2\mu\left(-\frac{\partial u_2}{\partial s};\frac{\partial u_1}{\partial s}\right)$, то соотношение $\bar{p}=\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\bar{q}+\bar{t}$, позволяет перейти к задаче в перемещениях. Приведем результат:

$$\bar{q}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma}\left[\left(1-\frac{1}{\varkappa}\right)I+\frac{2}{\varkappa}K\right]\bar{q}\frac{\partial\ln r}{\partial n_y}d_x\Gamma=2\left[\bar{f}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma}C\bar{f}d_x\Gamma\right],$$

$$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad K=\begin{pmatrix}e_1^2&e_1e_2\\e_1e_2&e_2^2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}\frac{\partial\ln r}{\partial n_y}&-\frac{\partial\ln r}{\partial s_y}\\\frac{\partial\ln r}{\partial s_y}&\frac{\partial\ln r}{\partial n_y}\end{pmatrix}.$$

Здесь $\bar{f}=\bar{t}$, $\varkappa=\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}$ для первой задачи, $\bar{f}=\bar{p}$, $\varkappa=-1$ — для второй.

Предлагаемые уравнения сопряжены известной системе Шермана—Лауричеллы, поэтому останавливаться на их свойствах нет необходимости. Другие уравнения, позволяющие находить напряжения на границе, были построены в ([2]); более сложный вид последних, по-видимому, связан с тем, что в них используются неизвестные разных дифференциальных порядков. Но уравнения А. И. Каландия пригодны и для многосвязных областей, в нашем же случае такое обобщение требует дополнительного исследования. Другим возможным обобщением является смешанная задача, на это указывает отмеченная выше аналогия. Применение системы к границам с угловыми точками следует осуществлять на основе работы ([3]).

III. К системе Ламе $\Delta u_i+ke_{,i}=0$ $\left(e=u_{i,i};\ k=\frac{\lambda+\mu}{\mu}\right)$ добавим уравнения, вытекающие из перестановочности дифференцирования: $u_{1,12}-u_{1,12}=0$; $u_{1,13}-u_{1,31}=0$ и т. д. Рассматривая первые производные в качестве неизвестных, имеем переопределенную систему первого порядка. Выписывая представления для $u_{1,i}$, рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned}v_{1,1}+v_{2,2}+v_{3,3}+ke_{,1}&=0\\v_{1,2}-v_{1,2}\qquad&=0\\v_{1,3}\qquad-v_{3,1}&=0\\v_{2,3}-v_{3,2}&=0\\\Delta e&=0\end{aligned}\right|,\quad v_i\equiv u_{1,i}.$$

Для каждого из трех представлений будем выбирать четыре уравнения из пяти, исключая соотношение перестановочности, не содержащее v_i. Подобным образом поступаем и для остальных компонент градиента. После некоторых преобразований получим:

$$u_{i,j}=\int\limits_{\Gamma}\left\{\frac{k}{2}\left[F(\delta_{ij}-e_ie_j)\right]\frac{\partial e}{\partial n}-e\frac{\partial}{\partial n}\left[F(\delta_{ij}-e_ie_j)\right]\right\}d_x\Gamma+$$

$$+\int\limits_{\Gamma}\left\{\left[\frac{\partial u_i}{\partial n}+ken_i\right]F_{,j}+\left[(\nabla u_i\times\bar{n})\times\nabla F\right]_j\right\}d_x\Gamma.$$

От нормальных производных объемной деформации освобождаемся с помощью теоремы Гаусса—Остроградского:

$$2\mu u_{i,j}=\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\int\limits_{\Gamma}\left\{(3e_ie_j-\delta_{ij})\bar{q}\cdot\nabla F-q_iF_{,j}-q_jF_{,i}\right\}d_x\Gamma+2\int\limits_{\Gamma}\left[\mu\frac{\partial u_i}{\partial n}+\right.$$

$$\left.+(\lambda+\mu)en_i\right]F_{,j}d_x\Gamma+2\mu\int\limits_{\Gamma}\left[\nabla F\times(\nabla u_i\times\bar{n})\right]_jd_x\Gamma;\ \bar{q}=(\lambda+2\mu)e\bar{n}+2\mu\bar{\omega}\times\bar{n}.$$

Для того чтобы сформулировать окончательный результат, удобно ввести следующие обозначения. Пусть $\bar{s}^i=\bar{a}^i\times\bar{n}$, $\bar{a}^i$—орты декартовой системы координат. Направления $\bar{s}^i$ лежат в касательной к Γ плоскости. Тогда

$$[\nabla u_i\times\bar{n}]_j=-\frac{\partial u_i}{\partial s^j};\quad R_1\equiv\frac{\partial u_3}{\partial s^2}-\frac{\partial u_2}{\partial s^3};\quad R_2\equiv\frac{\partial u_1}{\partial s^3}-\frac{\partial u_3}{\partial s^1};\quad R_3\equiv\frac{\partial u_2}{\partial s^1}-\frac{\partial u_1}{\partial s^2}.$$

Несложно показать, что $\bar{p}=\bar{q}+2\mu\bar{R}$. $\bar{R}$, равно как и все $\frac{\partial u_i}{\partial s^j}$, будем считать заданными на границе (первая задача). Формируем вне интегралов нормальную производную, переходим к пределу:

$$\frac{1}{2}\bar{q}-\frac{1}{\lambda+3\mu}\int\limits_{\Gamma}\left[3(\lambda+\mu)e_ie_j-2\mu\delta_{ij}\right]q_j\frac{\partial F}{\partial n_y}d_x\Gamma=\frac{2\mu(\lambda+2\mu)}{\lambda+3\mu}\left\{-R_i+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\Gamma}R_i\frac{\partial F}{\partial n_y}d_x\Gamma-\int\limits_{\Gamma}\left[\nabla u_i\times n+\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}(\bar{\omega}\cdot\bar{n})\bar{a}^i\right]\cdot\left[\nabla F\times\bar{n}_y\right]d_x\Gamma\right\}^+.$$

Ядро полученной системы сопряжено ядру регулярной системы теории потенциала, получаемой на основе введения псевдонапряжений. За подробностями можно обратиться к ([4]), спектральные свойства регулярной системы изучены в ([5]), там же доказана сходимость ряда последовательных приближений. Все эти результаты верны и для введенной системы. Как и в плоском случае, все градиенты перемещений на границе выражаются через граничные условия (в данном случае—проекции градиентов на поверхность) и переменные, относительно которых составлено уравнение.

Автор пользуется случаем выразить свою глубокую признатель-

ность профессору Н. Ф. Морозову и старшему научному сотруднику М. В. Паукшто, без деятельной поддержки которых работа не могла быть выполнена.

Ленинградский университет
им. А. А. Жданова

Ն. Ա. ՄԱՏԵԽԻՆ

Առաձգականության տեսությունում պոտենցիալի ուղղակի մեթոդի մասին

Հոդվածում պոտենցիալի մեթոդի հիմունքներով ստացվել են առաձգականության տեսության և Լապլասի հավասարումների խնդիրների համար ինտեգրալ հավասարումները։ Առաջարկված հավասարումներն ունեն հասարակ, լավ ուսումնասիրված կառուցվածքներ և թույլ են տալիս անմիջականորեն որոշել եզրագծի վրա առաջին դիֆերենցիալ կարգի մեծությունների արժեքները։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Б. Е. Победря*, ДАН СССР, т. 253, № 2 (1980). [2] *А. И. Каландия*, ПММ, т. 43, № 5 (1979). [3] *С. С. Заргарян*, Изв. АН СССР МТТ, № 3 (1982). [4] *В. Д. Купрадзе*, Методы потенциала в теории упругости, М., 1963. [5] Pham The Lai. Potentiels élastiques; tenseurs de Green et de Neumann, J. Méc., v. 6, № 2 (1967).