ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXIV 1987 2

УДК 519.95

МАТЕМАТИКА

Б. Е. Торосян

К оценкам активностей аргументов логических функций и числа линейно-отделимых подмножеств

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 2/IV 1986)

Работа состоит из двух частей. В первой части (п. 1.2) устанавливается одно общее утверждение о «типичных» значениях характеристик дискретных объектов, что применяется для характеризации набора активностей аргументов у почти всех функций алгебры логики. Во второй части доказывается необходимое и достаточное условие линейной отделимости подмножества в конечном множестве, что используется для установления различных верхних оценок числа таких подмножеств в зависимости от характера исходного конечного множества.

1.1. Пусть для каждого n имеется совокупность объектов $A^{(n)}=\{A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, \ldots, A_{\psi(n)}^{(n)}\}$, где $\psi(n)$ некоторая, стремящаяся к ∞ при $n\to\infty$, целочисленная функция от натуральной переменной n (например, n-вершинные графы, функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ k-значной логики и т. д.). Часто рассматривается некоторое свойство P, которым объекты из $A^{(n)}$ могут обладать или не обладать, и возникает вопрос о нахождении числа $\varphi_n(P)$ объектов из $A^{(n)}$, обладающих свойством P. Причем в роли P могут выступать как качественные, так и количественные характеристики объектов из $A^{(n)}$ (например, гамильтоновость для графов, длины дизъюнктивных нормальных форм для функций двузначной логики и т. д.).

Однако вычисление точного значения функции $\varphi_n(P)$ не всегда оказывается возможным, и тогда возникают задачи либо об оценке значения функции $\varphi_n(P)$, либо же о нахождении для него асимптотической формулы. Если P представляет количественные характеристики, то возникает также задача о нахождении «типичных» значений этих характеристик. Нередко на помощь в таких ситуациях приходят вероятностные методы (см., например, ([1,2])).

Говорят, что почти все объекты из $A^{(n)}$ обладают свойством P, если $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\varphi_n(P)}{\psi(n)}=1$. Тогда говорят также, что свойство P „типично“ для объектов из $A^{(n)}$.

Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ произвольная функция двузначной логики ([3]). Число $\omega_J^f=2^{-n}\cdot\sum\limits_{\tilde\alpha\in E^n}[f(\tilde\alpha)\oplus f^{\mathcal{J}}(\tilde\alpha)]$ называется активностью совокупности аргументов $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\}$ относительно функции f, где $E=\{0, 1\}$, $\mathcal{J}=\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}\subseteq\{\overline{1, n}\}$, $f^{\mathcal{J}}=f(x_1, \ldots, \overline{x}_{i_1}, \ldots, \overline{x}_{i_k}, \ldots, x_n)$,

$\overline{x}=1-x$, а $\oplus$ — сложение по модулю два. Очевидно, каждой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ двузначной логики можно сопоставить набор активностей всех непустых совокупностей аргументов из $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Число последних -2^n-1.

Активность $\omega_j^{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ выражает меру существенности выбранной совокупности аргументов относительно рассматриваемой функции и представляет определенный практический интерес. К ее использованию приводят различные задачи помехоустойчивости, повышения надежности и диагностики логических схем ([4,5]), задачи определения меры важности совокупности столбцов бинарных таблиц (например, в задачах классификации объектов с бинарными признаками) ([6]) и т. д.

Если $P_1, P_2, \ldots, P_k$ конечная совокупность свойств, при каждом из которых известно, что почти все объекты из $A^{(n)}$ им обладают, то легко устанавливается, что тогда почти все объекты из $A^{(n)}$ одновременно обладают всеми свойствами $P_1, P_2, \ldots, P_k$. В пункте 2 доказывается аналогичное утверждение для одного случая, когда объектам из $A^{(n)}$ сопоставлены наборы числовых характеристик и число свойств (относительно этих характеристик) стремится к бесконечности с ростом n. Утверждение используется для характеризации набора активностей аргументов у почти всех функций алгебры логики.

Пусть также A — произвольное множество точек n-мерного эвклидова пространства R^n. Подмножество $A_0 \subseteq A$ называется линейно-отделимым в A, если существует гиперплоскость, отделяющая точки из A_0 от точек $A \setminus A_0$.

К оценкам полного числа линейно-отделимых подмножеств n-мерного единичного куба E^n (пороговых функций) посвящены работы ([7–13]). В пункте 2 приводится одно необходимое и достаточное условие линейной отделимости подмножества произвольного конечного множества, что используется для установления различных верхних оценок как для полного числа таких подмножеств, так и для числа таких подмножеств, имеющих фиксированную мощность. При рассмотрении частного случая — вопроса оценки полного числа линейно-отделимых подмножеств в E^n, они дают известную оценку из ([9–12]).

1.2. В общем случае относительно множества объектов $A^{(n)}$ будем предполагать следующее:

а) каждому объекту $A_m^{(n)} \in A^{(n)}$ сопоставлен некоторый (числовой) вектор $\Omega^{A_m^{(n)}} = (\omega_1^{A_m^{(n)}}, \omega_2^{A_m^{(n)}}, \ldots, \omega_{\varphi(n)}^{A_m^{(n)}})$, компонентами которого являются определенные характеристики объекта $A_m^{(n)}$, где $\varphi(n)$ известная неубывающая целочисленная функция. Тем самым множество $A^{(n)}$ разбивается на классы эквивалентностей — объекты $A_{m_1}^{(n)}$ и $A_{m_2}^{(n)}$ из $A^{(n)}$ считаются эквивалентными тогда и только тогда, когда $\Omega^{A_{m_1}^{(n)}} = \Omega^{A_{m_2}^{(n)}}$.

б) каждая случайная величина $\omega_t^{A_m^{(n)}}$ для данных n и t (над множеством элементарных событий $A^{(n)}$) имеет конечные математическое ожидание $M_t(n)$ и дисперсию $D_t(n)$.

Для многих исследований, а также для данной работы важное значение имеет известное неравенство Чебышева [14].

Лемма 1 (неравенство Чебышева). *Пусть ξ—произвольная лучайная величина, имеющая конечные математическое ожидание $M\xi$ и дисперсию $D\xi$. Тогда для любого $a>0$ справедливо неравенство $P[|\xi-M\xi|\geqslant a]\leqslant\frac{D\xi}{a^2}$, где $P(C)$—вероятность наступления события C.*

Прямым следствием леммы 1 является следующее утверждение.

Утверждение. Пусть $\theta(n)\to\infty$ при $n\to\infty$ и t—произвольный фиксированный номер. Тогда почти для всех объектов из $A^{(n)}$ выполняется неравенство

$$|\omega_t^{A_m^{(n)}}-M_t(n)|<\sqrt{D_t(n)\cdot\theta(n)}\,. \tag{1}$$

Как уже было сказано в пункте 1.1, данное утверждение останется верным, если вместо неравенства (1) рассматривать одновременное выполнение аналогичных неравенств для произвольного конечного числа номеров $t_1, t_2, \ldots, t_k$. Следующее утверждение применимо к случаям, когда число таких номеров стремится к ∞ при $n\to\infty$.

Лемма 2. *Пусть $\theta(n)\to\infty$ при $n\to\infty$ и $D(n)=\max_t D_t(n)$. Тогда почти для всех объектов из $A^{(n)}$ одновременно выполняются неравенства*

$$|\omega_t^{A_m^{(n)}}-M_t(n)|<\sqrt{D(n)\cdot\varphi(n)\cdot\theta(n)},\quad t=\overline{1,\varphi(n)} \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $Q_t(n)$ есть доля объектов $A_m^{(n)}$ из $A^{(n)}$ таких, что $|\omega_t^{A_m^{(n)}}-M_t(n)|\geqslant\sqrt{D(n)\cdot\varphi(n)\cdot\theta(n)}$. Из леммы 1 следует, что $Q_t(n)\leqslant\frac{D_t(n)}{D(n)\cdot\varphi(n)\cdot\theta(n)}$. Следовательно, имеем $Q(n)=\max_t Q_t(n)\leqslant\frac{1}{\varphi(n)\cdot\theta(n)}$. Если теперь $Q_0(n)$—доля объектов $A_m^{(n)}$ из $A^{(n)}$ таких, у которых в $\Omega^{A_m^{(n)}}$ найдется хотя бы одна компонента $\omega_t^{A_m^{(n)}}$, что $|\omega_t^{A_m^{(n)}}-M_t(n)|\geqslant\sqrt{D(n)\cdot\varphi(n)\cdot\theta(n)}$, то, очевидно, будем иметь $Q_0(n)\leqslant\sum_{t=1}^{\varphi(n)}Q_t(n)\leqslant\varphi(n)\cdot Q(n)\leqslant\frac{1}{\theta(n)}$. Последнее же неравенство доказывает лемму.

Для произвольной функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ двузначной логики и для произвольного подмножества $\mathcal{J}\subseteq\overline{\{1,n\}}$ обозначим $a_{\mathcal{J}}^{f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}=2^{n-1}\cdot\omega_{\mathcal{J}}^{f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}$. Число $2\cdot a_{\mathcal{J}}^{f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}$ представляет количество всех вершин $\tilde{\alpha}\in E^n$ таких, что $f(\tilde{\alpha})\neq f^{\mathcal{J}}(\tilde{\alpha})$.

Теорема 1. *Пусть для каждого n имеется способ порождения системы $\mathfrak{S}(n)$ подмножеств из $\overline{\{1,n\}}$ и пусть $\theta(n)\to\infty$ при $n\to\infty$. Тогда почти для всех функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ двузначной логики одновременно выполняются неравенства*

$$|a_{\mathcal{J}}^{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)} - 2^{n-2}| < \sqrt{2^{n-3} \cdot |\mathfrak{S}(n)| \cdot \theta(n)},\ \mathcal{J} \in \mathfrak{S}(n), \qquad (3)$$

где $|X|$ — мощность множества X.

Доказательство. Пусть $A^{(n)}$ множество функций двузначной логики от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Заметим, что по каждому множеству $\mathcal{J} = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq \{\overline{1, n}\}$ множество E^n можно разбить на два подмножества таким образом, чтобы для любого $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in E^n$ из одного подмножества вершина $(\alpha_1, \ldots, \bar{\alpha}_{i_1}, \ldots, \bar{\alpha}_{i_k}, \ldots, \alpha_n)$ принадлежала другому подмножеству.

После такого представления легко убедиться, что вероятность того, что $a_{\mathcal{J}}^{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = p$, будет $2^{2^{n-1}} \cdot \binom{2^{n-1}}{p} \cdot 2^{-2^n} = 2^{-2^{n-1}} \cdot \binom{2^{n-1}}{p}$.

Далее имеем $M(a_{\mathcal{J}}^{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}) = 2^{-2^{n-1}} \cdot \sum\limits_{p=0}^{2^{n-1}} \binom{2^{n-1}}{p} \cdot p =$ (после несложных преобразований) $= 2^{n-2}$; $M[(a_{\mathcal{J}}^{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)})^2] = 2^{-2^{n-1}} \cdot \sum\limits_{p=0}^{2^{n-1}} \binom{2^{n-1}}{p} \cdot p^2 =$ $=$(после аналогичных преобразований)$= \frac{1}{4} \cdot [2^{2(n-1)} + 2^{n-1}]$; $D(a_{\mathcal{J}}^{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}) =$ $= M[(a_{\mathcal{J}}^{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)})^2] - [M(a_{\mathcal{J}}^{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)})]^2 = 2^{n-3}$.

Таким образом, для $A^{(n)}$ выполняются условия а), б) и, следовательно, условие (2) леммы 2. Последние же, при $|\mathfrak{S}(n)| = \varphi(n)$, эквивалентны выполнению условий (3). Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть для $\mathfrak{S}(n)$ из теоремы имеет место $|\mathfrak{S}(n)| = o(2^n)$. Тогда для почти всех функций двузначной логики активности всех совокупностей аргументов из $\mathfrak{S}(n)$ асимптотически равны $\frac{1}{2}$. В частности, для любого фиксированного натурального k активности всех совокупностей из не более k аргументов у почти всех функций двузначной логики асимптотически равны $\frac{1}{2}$.

2. Здесь будут рассматриваться только конечные множества.

Пусть в n-мерном эвклидовом пространстве зафиксировано множество точек A. Подмножество $A_0 \subseteq A$ называется линейно-отделимым в A, если существует гиперплоскость $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ (или, по-другому, $a \cdot x = b$), отделяющая подмножества A_0 и $A \setminus A_0$, т. е. если $\begin{cases} a \cdot x - b > 0, & \text{если } x \in A_0 \\ a \cdot x - b < 0, & \text{если } x \in A \setminus A_0. \end{cases}$

Положим $\varphi_{A_0}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A_0 \\ -1, & \text{если } x \in A \setminus A_0. \end{cases}$ Тогда нетрудно убедиться, что подмножество $A_0 \subseteq A$ будет линейно-отделимым в A тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases} (a \cdot x - b) \cdot \varphi_{A_0}(x) = |a \cdot x - b| & \text{для всех } x \in A \\ a \cdot x - b \neq 0 \end{cases}$$

имеет решение $(a; b) = (a_1, a_2, \ldots, a_n; b)$.

Преобразование этой системы, частный случай которого был рассмотрен в ([15]), а именно—сложение всех ее уравнений и покоординатные группировки в левой части полученного, приводит к следующему утверждению.

Теорема 2. *Подмножество $A_0\subseteq A$ линейно-отделимо в A тогда и только тогда, когда уравнение*

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{x\in A_0}x_i-\sum_{x\in A\setminus A_0}x_i\right)\cdot a_i+(|A|-2\cdot|A_0|)\cdot b=\sum_{x\in A}|a\cdot x-b|$$

имеет решение $(a;b)$ такое, что $a\cdot x-b\neq 0$ при любом $x\in A$.

Следствие 2. Для любого подмножества $A_0\subseteq A$ вектор $\Omega^{A_0}=(\sum_{x\in A_0}x_1,\ \sum_{x\in A_0}x_2,\ \ldots,\ \sum_{x\in A_0}x_n;\ |A_0|)$ полностью и однозначно определяет линейную отделимость подмножества A_0 в A.

Таким образом, произвольная верхняя оценка для числа векторов типа Ω^{A_0} в A будет и верхней оценкой для полного числа линейно-отделимых подмножеств в A. Разумеется, вид такой оценки будет строго зависеть от характера множества A. Рассмотрим некоторые частные случаи.

Пусть A есть n-мерная целочисленная решетка $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n)/ x_i\in\{\overline{0, k_i-1}\},\ i=\overline{1, n}\}$ и $N_A(n, p)$—число линейно-отделимых в A подмножеств мощности p. Тогда прямая покоординатная оценка числа всевозможных векторов типа Ω^{A_0} приводит к следующему утверждению.

Теорема 3. $N_A(n, p)\leqslant\prod_{i=1}^{n}[p\cdot(k_i-1)+1]$.

Следствие 3. $N_{E^n}(n, p)\leqslant(p+1)^n$.

Пусть также $m_i=\sum_{j=1}^{k_i-1}(j\cdot\prod_{t<i}k_t)+1$, $m_0=k_1\cdot k_2\cdot\ldots\cdot k_n+1$ и $N_A(n)$ обозначает полное число линейно-отделимых подмножеств в n-мерной целочисленной решетке A. Тогда имеет место

Теорема 4. $N_A(n)<m_0\cdot m_1\cdot m_2\cdot\ldots\cdot m_n$.

Несколько более тонкий подсчет числа возможных векторов приводит к известной оценке [9–12].

Следствие 4. $N_{E^n}(n)<2^{n^2}$ при $n\geqslant 2$.

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР и Ереванского государственного университета

Բ. Ն. ԹՈՐՈՍՅԱՆ

Տրամաբանական ֆունկցիաների արգումենտների ակտիվությունների և գծայնորեն—բաժանելի ենթաբազմությունների քանակի գնահատումների շուրջ

Աշխատանքը բաղկացած է երկու մասից։ Առաջին մասում հավանականային մեթոդների կիրառմամբ հաստատվում է մի ընդհանուր պնդում դիսկրետ օբյեկտների բնութագրիչների «տիպիկ» արժեքների մասին այն դեպքի համար, երբ բնութագրիչների քանակը ձգտում է անվերջության։ Պնդումն օգտագործվում է տրամաբանության հանրահաշվի համարյա բոլոր ֆունկցիաների արգումենտների ակտիվությունների հավաքածուի բնութագրման հար-

ցում։ Երկրորդ մասում ապացուցվում է էվկլիդյան տարածության կամայական վերջավոր բազմությունում ենթաբազմության գծայնորեն—բաժանելի լինելու մի անհրաժեշտ և բավարար պայման, որն օգտագործվում է գծայնորեն—բաժանելի ենթաբազմությունների քանակի տարբեր վերին գնահատականների ստացման հարցերում՝ կախված դիտարկվող վերջավոր բազմության բնույթից։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Г. П. Гаврилов, А. А. Сапоженко*, Сборник задач по дискретной математике, Наука, М., 1977. [2] *П. Эрдеш, Дж. Спенсер*, Вероятностные методы в комбинаторике, Мир, М., 1976. [3] *С. В. Яблонский*, Введение в дискретную математику, Наука, М., 1979. [4] *Ш. Е. Бозоян*, Изв. АН СССР, Тех. киб., № 6, 1975. [5] *А. В. Петросян*, ДАН АрмССР, т. 36, № 3 (1963). [6] *Б. Е. Торосян*, Тр. ВЦ АН АрмССР, т. 17 (1987). [7] *М. Блох, Я. Моравек*, Кибернетический сб., н. с., вып. 6, 1969. [8] *С. Яджима, Т. Ибараки*, Кибернетический сб., н. с., вып. 6, 1969. [9] *Э. И. Нечипорук*, Проблемы кибернетики, вып. 11, 1964. [10] *R. O. Winder*, AIEE, S—134 (1961). [11] *S. H. Cameron*, Bionics symposium, Rept 60—600 (1960). [12] *E. Goto, H. Takahasi*, Proc. IFIP, Publ. CO (1963). [13] *S. Muroga*, IEEE EC—14, № 2 (1965). [14] *В. Феллер*, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. I, Мир, М., 1967. [15] *М. Дертоузос*, Пороговая логика, Мир, М., 1967.