

УДК 517.51

МАТЕМАТИКА

Р. А. Аветисян, С. М. Оганесян

Об обобщенном D -свойстве тригонометрических рядов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 1/IV 1986)

Классическая теорема Лузина—Данжуа гласит, что если тригонометрический ряд абсолютно сходится на некотором множестве положительной меры, т. е. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \cos nx + b_n \sin nx| < \infty$, при $x \in E$, $|E| > 0$ (через $|E|$ мы обозначаем лебеговскую меру множества E), то $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| < \infty$.

Пусть $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ произвольная монотонно возрастающая последовательность натуральных чисел. Обозначим через $A_i(x)$ следующее выражение: $A_i(x) = \sum_{m=n_{i-1}}^{n_i-1} a_m \cos mx + b_m \sin mx$, $i = 1, 2, \dots$ (считаем $n_0 = 1$).

Определение. Будем говорить, что тригонометрическая система обладает обобщенным D -свойством относительно подпоследовательности $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, если из условия $\sum_{i=1}^{\infty} |A_i(x)| < \infty$; $x \in E$, $|E| > 0$, следует, что $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| < \infty$.

В работе ⁽¹⁾ доказано, что если последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию

$$n_{k+1} - n_k \leq C \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (1)$$

где C —абсолютная постоянная, то из условия $\sum_{i=1}^{\infty} |A_i(x)| < \infty$, $x \in E$; $|E| > 0$, следует, что $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| < \infty$.

Иначе говоря условие (1) является достаточным, чтобы тригонометрическая система обладала обобщенным D -свойством.

В статье ⁽²⁾ приведен пример некоторой последовательности $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, которая удовлетворяет условию $n_k = O(k^4)$, и построен тригонометрический ряд такой, что $\sum_{i=1}^{\infty} |A_i(x)| < \infty$ п. в. на $[0, 2\pi]$, однако

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| = +\infty.$$

Оказывается, что этот пример можно значительно усилить. А именно, справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in [a, b]$ произвольная ортонормированная система, а $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ произвольная возрастающая последовательность натуральных чисел, удовлетворяющая условию

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (n_{k+1} - n_k) = +\infty. \quad (2)$$

Тогда существует ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

такой, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{m=n_{i-1}}^{n_i-1} a_m \varphi_m(x) \right| < \infty \text{ п. в. на } [a, b],$$

но $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| = +\infty.$

Доказательство. Так как выполняется условие (2), то найдется такая возрастающая последовательность натуральных чисел $\{j_m\}_{m=1}^{\infty}$, что $n_{j_m+1} - n_{j_m} > 2^m$, ($m = 1, 2, \dots$).

Положим

$$a_i = \begin{cases} \frac{1}{2^m}, & n_{j_m} \leq i < n_{j_m} + 2^m \\ 0, & n_{j_m} + 2^m \leq i \leq n_{j_{m+1}}; \quad 1 \leq i < n_1 \end{cases} \quad (3)$$

и рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x). \quad (4)$$

Имеем, по неравенству Коши—Буняковского,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b \left| \sum_{i=n_{k-1}}^{n_k-1} a_i \varphi_i(x) \right| dx &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int_a^b \left[\sum_{i=n_{k-1}}^{n_k-1} a_i \varphi_i(x) \right]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{b-a} = \\ &= \sqrt{b-a} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=n_{k-1}}^{n_k-1} a_i^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Учитывая (3), будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=n_{k-1}}^{n_k-1} a_i^2 \right\}^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{\frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \\ &+ \underbrace{\sqrt{\frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^n}}}_{2^n \text{ слагаемых}} + \dots = \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{4}} + \dots + \sqrt{\frac{1}{2^n}} + \dots \end{aligned}$$

Так как ряд в правой части последнего равенства сходится, то учитывая (5), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b \left| \sum_{i=n_{k-1}}^{n_k-1} a_i \varphi_i(x) \right| dx < \infty.$$

Отсюда, по теореме Леви, следует, что $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{i=n_{k-1}}^{n_k-1} a_i \varphi_i(x) \right| < \infty$ п. в. на $[a, b]$. А по построению a_i имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^n} \right)}_{2^n \text{ слагаемых}} + \dots = \infty.$$

Таким образом из этой теоремы следует, что условие (1) является необходимым и достаточным, чтобы тригонометрическая система обладала обобщенным D -свойством относительно подпоследовательности $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$.

В связи с теоремой 1 возникает следующий вопрос: может ли существовать тригонометрический ряд, который удовлетворяет утверждению этой теоремы независимо от выбора последовательности $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющей условию (2)? (Этот вопрос был поставлен А. А. Талаляном).

Следующая теорема дает отрицательный ответ на этот вопрос.

Теорема 2. Пусть некоторый тригонометрический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (5)$$

удовлетворяет следующему условию:

для любой последовательности натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющей условию (2), существует некоторое множество $E(\{n_k\})$ положительной меры (множество E зависит от последовательности $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$) такое, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} |A_i(x)| < \infty \text{ при } x \in E.$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| < \infty.$$

Доказательство. Мы будем использовать следующую лемму из совместной работы С. Б. Стечкина и П. Л. Ульянова (¹).

Лемма 1.5. Пусть $E \subset [0, 2\pi]$ — измеримое множество меры $|E| = \mu > 0$, n — натуральное число, $r \geq 1$, $q \geq 1$ — действительные числа и $T(x)$ — тригонометрический многочлен следующего вида:

$$T(x) = \sum_{k=N+1}^{N+n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Тогда для всех $N \geq 0$ справедливо неравенство

$$\|T\|_{L^r(0, 2\pi)} \leq C(n, \mu) \cdot \|T\|_{L^q(E)}. \quad (6)$$

Здесь, как обычно, под нормой понимается число $\|f\|_{L^q(E)} = \left(\int_E |f|^q dx \right)^{1/q}$ ($q \geq 1$).

Заметим также, что постоянная $C(n, \mu)$ зависит только от „дли-

ны" и многочлена $T(x)$ и от меры множества E . $C(n, \mu)$ возрастает с убыванием μ .

Переходя к доказательству теоремы 2, предположим, что ее утверждение неверно, т. е. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| = +\infty$.

Выберем натуральное число m настолько большим, чтобы

$$\sum_{n=1}^{3m} |a_n| + |b_n| > 3 \cdot C\left(3, \frac{1}{3}\right)$$

Сгруппируем члены ряда (5) до номера $3m$ по 3 члена в каждой группе:

$$T_1^{(1)}(x) + T_2^{(1)}(x) + \dots + T_m^{(1)}, \text{ где}$$

$$T_1^{(1)}(x) = \sum_{i=1}^3 a_i \cos ix + b_i \sin ix; \dots, \quad T_m^{(1)} = \sum_{i=3m-2}^{3m} a_i \cos ix + b_i \sin ix.$$

Так как $\sum_{k=3m+1}^{\infty} |a_k| + |b_k| = +\infty$, то можно выбрать настолько

большое натуральное число l , чтобы $\sum_{k=3m+1}^{3m+4l} |a_k| + |b_k| > 4 \cdot C\left(4, \frac{1}{4}\right)$. (6')

Сгруппируем члены ряда (5) с номера $3m+1$ до номера $3m+4l$ по 4 члена в каждой группе:

$$T_1^{(2)}(x) + T_2^{(2)}(x) + \dots + T_l^{(2)}(x), \text{ где}$$

$$T_1^{(2)}(x) = \sum_{i=3m+1}^{3m+4} a_i \cos ix + b_i \sin ix, \dots, \quad T_l^{(2)}(x) = \sum_{i=3m+4l-3}^{3m+4l} a_i \cos ix + b_i \sin ix.$$

Этот процесс продолжим до бесконечности.

По условию теоремы, ряд

$$|T_1^{(1)}(x)| + \dots + |T_m^{(1)}(x)| + |T_1^{(2)}(x)| + \dots + |T_l^{(2)}(x)| + \dots \quad (7)$$

сходится на некотором множестве E положительной меры. По теореме Егорова, найдется множество $F \subseteq E$, $|F| > 0$, такое, что ряд (7) на множестве F сходится равномерно. Следовательно,

$$\int_F |T_1^{(1)}(x)| dx + \dots + \int_F |T_m^{(1)}(x)| dx + \int_F |T_1^{(2)}(x)| dx + \dots + \int_F |T_l^{(2)}(x)| dx + \dots < \infty. \quad (8)$$

Применим лемму 1.5 для $r=2$ и $q=1$ для многочлена $T_j^{(s)}(x)$, который по построению содержит $s+2$ членов.

$$\|T_j^{(s)}\|_{L_1(0, 2\pi)} \leq C(s+2, |F|) \|T_j^{(s)}\|_{L_1(F)}. \quad (9)$$

Пусть $T_j^{(s)}(x) = \sum_{k=N}^{N+s+2} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$

Тогда, учитывая, что

$$\|T_j^{(s)}(x)\|_{L_1(0, 2\pi)} = \sqrt{\sum_{k=N}^{N+s+2} a_k^2 + b_k^2},$$

неравенство (9) можно переписать следующим образом:

$$\int_F |T_j^{(s)}(x)| dx \geq \frac{1}{C(s+2, |F|)} \cdot \sqrt{\sum_{k=N}^{N+s+2} a_k^2 + b_k^2}$$

Заметим также, что

$$\sqrt{\sum_{k=N}^{N+s+2} a_k^2 + b_k^2} \geq \frac{1}{s+2} \sum_{k=N}^{N+s+2} |a_k| + |b_k|.$$

Окончательно будем иметь

$$\int_F |T_j^{(s)}(x)| dx \geq \frac{1}{(s+2)C(s+2, |F|)} \sum_{k=N}^{N+s+2} |a_k| + |b_k|.$$

Из построения многочленов $T_j^{(s)}(x)$ следует, что

$$\sum_{k=N}^{N+s+2} |a_k| + |b_k| > (s+2) \cdot C\left(s+2, \frac{1}{s+2}\right).$$

Очевидно, что для достаточно больших значений s $C\left(s+2, \frac{1}{s+2}\right) > C(s+2, |F|)$, следовательно, для этих значений s будем иметь

$$\int_F |T_j^{(s)}(x)| dx > 1,$$

что противоречит сходимости ряда (8).

Полученное противоречие доказывает теорему 2.

Ереванский государственный
университет

Ռ. Ս. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ, Ս. Մ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ

Եռանկյունաչափական շարքերի ընդհանրացված D - հատկության
մասին

Հոդվածում ապացուցված են հետևյալ 2 թեորեմները.

1. Եթե $\{n_k\}$ բնական թվերի հաջորդականությունը բավարարում է
- 2) պայմանին, ապա ցանկացած օրթոնորմալ սիստեմ օժտված չէ ընդհանրացված D - հատկությամբ այդ հաջորդականության նկատմամբ:
2. Եթե որևէ եռանկյունաչափական շարք ցանկացած ընդլայնվող խմբերով բացարձակ զուգամետ է որևէ դրական չափի բազմության վրա (բազմությունը կախված է խմբերից), ապա այն բացարձակ զուգամետ է ամենուրեք:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ С. Б. Стечкин, П. Л. Ульянов, Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 86 (1965).
- ² Р. А. Аветисян, ДАН АрмССР, т. 74, № 3 (1982).