ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXIV 1987 2

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

С. Х. Дарбинян

О специальных контурах направленных графов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 2/III 1986)

В настоящей работе рассматриваются конечные орграфы без петель и кратных дуг. Все понятия и обозначения, не определяемые здесь, можно найти в [1]. В работе [2] доказано, что если орграф G удовлетворяет достаточному условию гамильтоновости Нэш-Вильямса [3], или Гуйя-Ури [4], или Вудала [5], то G содержит неполный гамильтоновый контур, т. е. контур, который получается из гамильтонового контура после переориентации одной дуги. Через $D(p, n)=[x_1x_2 \ldots x_n; x_1y_1y_2 \ldots y_{p-n}x_n]$ обозначим p-вершинный орграф с множеством вершин $\{x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, y_2, \ldots, y_{p-n}\}$ и множеством дуг $\{x_1y_1, y_{p-n}x_n\}\bigcup\{x_ix_{i+1}/1\leqslant i\leqslant n-1\}\bigcup\{y_iy_{i+1}/1\leqslant i\leqslant p-n-1\}$, где $2\leqslant \leqslant n\leqslant p$, т. е. орграф $D(p, n)$ получается из p-вершинного гамильтонового контура после переориентации $n-1$ последовательных дуг. В частности $D(p, 2)$ есть неполный гамильтоновый контур. В [6] доказано, что любой p-вершинный $(p\geqslant 10)$ направленный граф с минимальными полустепенями, не меньшими $[(p-2)/2]$*, является панциклическим, т. е. содержит контур любой длины k $(3\leqslant k\leqslant p)$. Автором настоящей работы было доказано, что такие направленные графы (при $p\geqslant 12$), а также орграфы, которые удовлетворяют достаточному условию гамильтоновости Мейнила [7], содержат неполные гамильтоновые контуры (эти результаты представлены к опубликованию). В настоящей работе доказывается, что любой p-вершинный $(p\geqslant 10)$ направленный граф с минимальными полустепенями, не меньшими $[(p-2)/2]$, содержит орграф $D(p, 3)$.

Пусть G есть орграф с множеством вершин V и множеством дуг E. Пусть $A, B\subseteq V$ и $x\in V$. Обозначим

$$E(A\to B)=\{yz\in E/y\in A,\ z\in B\};\ E(A, B)=E(A\to B)\bigcup E(B\to A);$$
$$I(x)=\{y\in V/yx\in E\};\ O(x)=\{y\in V/xy\in E\}.$$

Запись $A\rightleftarrows B$ означает, что если $y\in A$ и $z\in B$, то $yz\in E$. Через $\beta(x)$ обозначим количество вершин, отличных от x, которые не смежны с вершиной x. В этих обозначениях, если $A=\{x\}$ или $B=\{x\}$, то вместо $\{x\}$ напишем x. $E(x, y)=\varnothing$ означает, что вершины x и y не смежны между собой, а $\overleftarrow{G}$—орграф, обратный к орграфу G, т. е. $\overleftarrow{G}$

* Как обычно, $[a]$ обозначает наибольшее целое, не большее a.

получается из G после переориентации каждой дуги. Через $\vec{C}_k$ обозначается контур длины k, а через $[m, n]$ множество целых чисел, не меньших m и не больших n. Если $\vec{C}_k = x_1 x_2 \ldots x_k x_1$, то всюду индексы вершин контура $\vec{C}_k$ берутся по $\mathrm{mod}(k)$, т. е. $x_{k+i} = x_i$. Запись $D \subseteq G$ означает, что орграф D является подорграфом орграфа G, а $A \rightrightarrows B \rightrightarrows C$ означает, что $A \rightrightarrows B$ и $B \rightrightarrows C$.

Теорема. *Пусть G есть p-вершинный ($p \geqslant 10$) направленный граф с минимальными полустепенями не меньшими* $[(p-2)/2] = n - 1$. *Тогда G содержит орграф $D(p, 3)$.*

Доказательство. Пусть V множество вершин орграфа G, а E—множество его дуг. Заметим, что для любой вершины x имеет место $\beta(x) \leqslant 2$. Если $A \subseteq V$ и $|A| \geqslant n+2$, то для любой вершины $y \notin A$ имеют место $E(y \to A) \neq \varnothing$ и $E(A \to y) \neq \varnothing$. По (") (теорема 2), G содержит контур длины $p-1$. Пусть $\vec{C}_{p-1} = x_1 x_2 \ldots x_{p-1} x_1$—произвольный контур длины $p-1$ в орграфе G и вершина y не принадлежит этому контуру.

Предположим, что G не содержит $D(p, 3)$. Тогда для любого $i \in [1, p-1]$ имеет место

$$|E(y \to x_i)| + |E(x_{i+1} \to y)| \leqslant 1. \tag{1}$$

Легко заметить, что для любого $k \in [1, p-1]$ имеют место утверждения 1°—4°.

1°. *Если* $y \rightrightarrows \{x_k, x_{k+2}\}$ *или* $\{x_{k-2}, x_k\} \rightrightarrows y$, *то* $x_{k-1} x_{k+1} \notin E$.

2°. *Если* $y x_k, x_{k-2} y \in E$ *или* $x_k y, y x_{k+2} \in E$, *то* $x_{k+1} x_{k-1} \notin E$.

3°. *Если* $x_{k-1} y, y x_{k+2} \in E$, *то* $x_k x_{k+3} \notin E$ *и* $x_{k-2} x_{k+1} \notin E$.

4°. *Если* $x_{k-2} y, y x_k \in E$, *то* $|E(x_{k+2} \to x_{k-1})| + |E(x_{k-1} \to x_{k+1})| \leqslant 1$.

Рассмотрим следующие возможные случаи.

Случай 1. $I(y) = \{x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}\}$.

Очевидно, что $E(y, x_{p-1}) = \varnothing$. Нетрудно убедиться, что $E(x_m, y) \neq \varnothing$. Действительно, в случае $E(x_m, y) = \varnothing$ имеет место $O(y) = \{x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_{p-2}\}$. Поэтому, пользуясь утверждениями 1° и 2°, получим $E(x_m, \{x_{m-2}, x_{m+2}\}) = \varnothing$. Значит, так как $E(y, x_m) = \varnothing$, то $\beta(x_m) \geqslant 3$, что невозможно. Из $E(x_m, y) \neq \varnothing$ следует, что $y x_m \in E$. Теперь, пользуясь утверждениями 1°—3°, получим, что

$$E(x_{m-2} \to \{x_m, x_{m+1}\}) = E(x_{m-1}, x_{m-3}) = E(x_{m+1} \to x_{m-1}) =$$
$$= E(x_{m-4} \to x_{m-1}) = \varnothing. \tag{2}$$

Докажем, что

$$E(\{x_{p-1}, x_1, x_2, \ldots, x_{m-5}\} \to x_{m-1}) = \varnothing. \tag{3}$$

Доказательство (3). Предположим, что (3) неверно, т. е. для некоторого $i \in \{p-1\} \cup [1, m-5]$ имеет место $x_i x_{m-1} \in E$. Тогда очевидно, что для любого $j \in [m, p-2]$ имеет место $|E(x_{m-2} \to x_{j+1})| + |E(y \to x_j)| \leqslant 1$. Отсюда и из $E(x_{m-2} \to \{x_{m-3}, x_m\}) = \varnothing$ получим, что $x_{m-2} \rightrightarrows \{x_1, x_2, \ldots, x_{m-4}\}$. Следовательно, для любого $l \in [1, m-5]$ имеет место $|E(x_{l-1} \to x_{m-1})| + |E(x_{m-1} \to x_l)| \leqslant 1$.

Поэтому из $x_i x_{m-1} \in E$, $\beta(x_{m-1}) \leqslant 2$ и (2) следует, что вершина x_{m-1} смежна со всеми вершинами $x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{p-2}$ и $x_{m-1} x_{m+1} \in E$.

Поэтому из утверждения 1° следует, что $yx_{m+2}\notin E$. Значит $E(y, x_{m+2})=\varnothing$ и $yx_{m+1}\in E$. Следовательно, из утверждения 3° вытекает, что $x_{m-1}x_{m+2}\notin E$, т. е. $x_{m+2}x_{m-1}\in E$, а это противоречит утверждению 4°. Итак, равенство (3) доказано.

Из (2) и (3) получим, что

$$\{x_{m+2}, x_{m+3}, \ldots, x_{p-2}\}\rightrightarrows x_{m-1}. \tag{4}$$

Отсюда и из утверждения 4° имеем, что $x_{m-1}x_{m+1}\notin E$. Поэтому, по (2) и (3), $E(x_{m-1}, x_{m+1})=\varnothing$ и

$$x_{m-1}\rightrightarrows\{x_{p-1}, x_1, x_2, \ldots, x_{m-4}\}. \tag{5}$$

Из (4) и (5) имеем, что $x_m x_{m-2}\notin E$ и, значит, по (2), $E(x_m, x_{m-2})=\varnothing$.

Пусть $x_{m+1}x_{m-2}\in E$. Тогда из (4) следует, что

$$E(x_m\to\{x_{m+3}, x_{m+4}, \ldots, x_{p-1}\})=\varnothing. \tag{6}$$

Из (6) и $E(x_m\to\{y, x_{m-1}, x_{m-2}\})=\varnothing$ вытекает, что $x_m\rightrightarrows\{x_{m+2}, x_1, x_2, \ldots, x_{m-3}\}$. Поэтому, так как для некоторого $i\in[m+3, p-2]$ имеет место $yx_i\in E$, то, по (4), имеем $D(p, 3)=[x_m x_{m+1}x_{m-2}; x_m x_{m+2}\ldots \ldots x_{i-1}x_{m-1}y\, x_i x_{i+1}\ldots x_{p-1}x_1 x_2\ldots x_{m-2}]$, что является противоречием.

Пусть теперь $x_{m+1}x_{m-2}\notin E$. Тогда из (2) следует, что

$$E(x_{m+1}, \{x_{m-2}, x_{m-1}\})=\varnothing. \tag{7}$$

Кроме того, по (4), имеем, что для любого $i\notin[m-2, m+2]$ имеет место

$$|E(x_i\to x_{m+1})|+|E(x_{m+1}\to x_{i+1})|\leqslant 1.$$

Отсюда и из (7) получим, что

$$\{y, x_1, x_2, \ldots, x_{m-3}\}\rightrightarrows x_{m+1}\rightrightarrows\{x_{m+3}, x_{m+4}, \ldots, x_{p-1}\}. \tag{8}$$

Далее очевидно, что $E(x_m, x_{m-3})=\varnothing$, поскольку в противном случае из (4), (8) и утверждения 3° следует, что $x_m x_{m-3}\in E$ и $D(p, 3)=[x_{m+1} x_{m+2}x_{m-1}; x_{m+1}x_{m+3}\ldots x_{m-4}yx_m x_{m-3}x_{m-2}x_{m-1}]$. Из $E(x_m, \{x_{m-2}, x_{m-3}\})= =\varnothing$ имеем, что $x_m x_{m+3}\in E$ или $x_{m+3}x_m\in E$. Поэтому, по (4) и (8), $D(p, 3)=[x_{m+2}x_{m-1}y; x_{m+2}x_{m+3}x_m x_{m+1}x_{m+4}\ldots x_{m-2}y]$ или $D(p, 3)= =[x_{m+1}x_{m+2}x_{m+3}; x_{m+1}x_{m+4}\ldots x_{m-1}yx_m x_{m+3}]$, что невозможно. Итак, случай 1 рассмотрен.

Случай 2. $O(y)=\{x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}\}$.

Этот случай сводится к случаю 1 (для этого нужно рассмотреть $\overleftarrow{G}$).

Случай 3. $I(y)=\{x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+\alpha+1}, x_{k+\alpha+2}, \ldots, x_{k+t}\}$; $O(y)= =\{x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+\alpha-1}, x_{k+t+1}, x_{k+t+2}, \ldots, x_{p-2}\}$ *и* $E(y, \{x_{p-1}, x_{k+\alpha}\})= =\varnothing$, *где* $k\geqslant 1$, $\alpha\geqslant 2$, $t-\alpha\geqslant 1$ *и* $p-2\geqslant k+t+1$.

Можем предположить, что $k\geqslant 2$, иначе вместо вершины x_{p-1} рассмотрим вершину $x_{k+\alpha}$.

Подслучай 3.1. $y\rightrightarrows\{x_{p-2}, x_{p-3}\}$ *и* $\{x_{p-4}, x_{p-3}\}\rightrightarrows x_{p-1}$.

Нетрудно убедиться, что

$$E(x_1, \{x_{p-3}, x_{p-2}\})=\varnothing. \tag{9}$$

Отсюда вытекает, что $x_{p-1}x_2\notin E$, так как в случае $x_{p-1}x_2\in E$ для контура $x_{p-1}x_2x_3\ldots x_k yx_{k+1}\ldots x_{p-2}x_{p-1}$ и для вершины x_1 не имеет место неравенство (1). Если $x_2x_{p-2}\notin E$, то, по (9) и неравенству (1), для контура $x_{p-3}x_{p-1}x_1x_2\ldots x_kyx_{k+1}\ldots x_{p-3}$ имеет место случай 1. Поэтому предположим, что $x_2x_{p-2}\in E$. Пусть $x_3x_1\in E$. Тогда из (9) следует существование такого $i\in[3, p-5]$, что $x_ix_1, x_1x_{i+1}\in E$, и, значит, $D(p, 3)\subseteq G$. Пусть теперь $x_3x_1\notin E$. Тогда из (9) имеем, что $x_1x_3\in$ $\in E$ и $D(p, 3)=[x_2yx_{p-3}; x_2x_{p-2}x_{p-1}x_1x_3\ldots x_{p-3}]$, что невозможно.

Подслучай 3.2. *$y\rightrightarrows\{(x_{p-2}, x_{p-3}\}$ и $|E(\{x_{p-4}, x_{p-3})\to x_{p-1})|\leqslant 1$.*

Можем предположить, что

$$|E(x_{p-1}\to\{x_2, x_3\})|\leqslant 1, \tag{10}$$

так как иначе в орграфе $\overleftarrow{G}$ имеем подслучай 3.1.

Предположим, что $x_{p-3}x_{p-1}\in E$. Тогда $x_{p-4}x_{p-1}\notin E$, и так как не существует такое $i\in[1, p-3]$, что $x_ix_{p-1}, x_{p-1}x_{i+1}\in E$, то из (10) имеем, что $x_{p-1}x_{p-4}\in E$. Отсюда вытекает, что $E(x_1, x_{p-2})=\varnothing$. Поэтому предположим, что $x_2x_{p-2}\in E$ (иначе придем к случаю 1). Отсюда очевидно, что $yx_3\in E$. Так как не существует такое $i\in[1, p-3]$, что x_ix_{p-1}, $x_{p-1}x_{i+1}\in E$, то $x_{p-1}x_2\in E$ или $x_2x_{p-1}\in E$. Поэтому $D(p, 3)=[x_{p-1}x_2x_{p-2}; x_{p-1}x_1yx_3x_4\ldots x_{p-2}]$ или $D(p, 3)=[x_1x_2x_{p-1}; x_1yx_3x_4\ldots x_{p-1}]$, что невозможно.

Теперь предположим, что $x_{p-3}x_{p-1}\notin E$. Пользуясь вышерассмотренными подслучаями, предположим, что $E(x_{p-1}, x_n)=\varnothing$ и

$$\{x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}\}\rightrightarrows x_{p-1}\rightrightarrows\{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{p-3}\}. \tag{11}$$

Очевидно, что $yx_{p-4}, x_3y\in E$. Из утверждения 2° следует, что $x_{t+k+3}x_{t+k+1}\notin E$, а из утверждения 1° следует, что если $x_{t+k+1}x_{t+k+3}\in$ $\in E$, то $t+k=p-5$ и $D(p, 3)=[x_{p-1}x_{p-3}x_{p-2}; x_{p-1}x_1x_2\ldots x_kyx_{k+1}x_{k+2}\ldots$ $\ldots x_{p-4}x_{p-2}]$, что невозможно. Отсюда $E(x_{k+t+1}, x_{k+t+3})=\varnothing$. Далее, пользуясь (11), получим, что $E(x_1, x_{t+k+1})=\varnothing$. Поэтому, так как $x_{p-1}x_{t+k+1}\in E$, то если рассмотрим контур $x_1x_2\ldots x_{t+k}yx_{t+k+2}x_{t+k+3}\ldots$ $\ldots x_{p-1}x_1$, пользуясь (1), получим, что $\mathrm{od}(x_{t+k+1})\leqslant 1$, а это невозможно.

Подслучай 3.3. *$x_{p-3}y\in E$.*

Тогда $\alpha=n-1$. Поэтому, учитывая подслучай 3.1, предположим, что $p=k+\alpha+4$. Имеем, что $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}\}\rightrightarrows y\rightrightarrows\{x_{n-1}, x_n, \ldots, x_{p-5}\}$. Следовательно, пользуясь утверждениями 1°—3°, получим, что $E(x_{n-1}\to x_{n+2})=E(x_{n-1}, x_{n-3})=E(x_{n-4}\to x_{n-1})=E(x_{n+1}\to x_{n-1})=\varnothing$. Отсюда видно, что для контура $x_1x_2\ldots x_{n-2}yx_nx_{n+1}\ldots x_{p-1}x_1$ имеет место подслучай 3.1 или 3.2.

Таким образом все возможные случаи рассмотрены. Теорема доказана.

Замечание. *Пусть G есть направленный граф с множеством вершин $X_1\cup X_2\cup X_3$, где $|X_i|=3$ $(1\leqslant i\leqslant 3)$ и $X_i\cap X_j=\varnothing$ $(i\neq j)$, и дуга xy принадлежит графу G тогда и только тогда, когда $x\in X_i$ и $y\in X_{i+1(\mathrm{mod}3)}$. Очевидно, что G не содержит орграф $D(p, 3)$.*

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Ս. Խ. ԴԱՐԲԻՆՅԱՆ

Ուղղորդված գրաֆների հատուկ տիպի ցիկլերի մասին

Ապացուցվում է հետևյալ պնդումը՝

Թեորեմ. Դիցուք G-ն կամայական p-գագաթանի ($p \geq 10$) ուղղորդված գրաֆ է, որի մինիմալ կիսաաստիճանները փոքր չեն [p-2)/2] թվից: Ապա G-ն պարունակում է այնպիսի ցիկլ, որը ստացվում է համիլտոնյան ցիկլից երկու հաջորդական աղեղների կողմնորոշումը շրջելուց:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ф. Харари.* Теория графов, Мир, М., 1973. [2] *A. Benhocine,* Journal of Graph Theory, v. 8 (1984). [3] *C. St. J. A. Nash-Williams,* Springer Lecture Notes, v. 110 (1969). [4] *A. Ghoulla-Houri,* C. R. Acad. Sci., Paris, v. 25 (1960). [5] *D. R. Woodall,* Proc. London Math. Soc., v. 14 (1972). [6] *С. Х. Дарбинян,* Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники, Ереван, № 14 (1985). [7] *H. Meyniel,* Journal Combinatorial Theory, Ser. B, v. 14 (1973).