ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXIV 1987 1

УДК 539.3

МЕХАНИКА

Г. Е. Багдасарян

Вынужденные и параметрические колебания идеально проводящей пластинки, обусловленные нестационарным магнитным полем

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 7/VIII 1986)

В работе установлена возможность возбуждения резонансных колебаний (как обычного, так и параметрического типа) идеально проводящей пластинки при помощи нестационарного магнитного поля. Получены формулы для нахождения критических частот внешнего магнитного поля, определяющие границы параметрического резонанса. Определены также амплитуды вынужденных колебаний и исследована их зависимость от частоты и амплитуды нестационарного магнитного поля.

1. Рассмотрим идеально проводящую, тонкую упругую пластинку постоянной толщины $2h$, отнесенную к декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 так, что срединная плоскость недеформированной пластинки совпадает с координатной плоскостью x_1ox_2. Пусть пластинка занимает область $(|x_3|\leqslant h, |x_1|\leqslant a, -\infty<x_2<\infty)$ и является частью бесконечной идеально проводящей жесткой неподвижной диафрагмы постоянной толщины $2h$. Пусть далее в области $x_3>h$ установлено начальное нестационарное магнитное поле $H_0+H_1\cos\omega t$, параллельное координатной линии ox_1.

Известно (1), что нестационарная часть магнитного поля не проникает в область, занимаемую идеальным проводником (область $|x_3|<h$). Поэтому на тонком приповерхностном слое появляются экранирующие токи, препятствующие проникновению нестационарного магнитного поля внутрь тела. Из условия непроникания для рассматриваемой задачи легко определить поверхностные токи и с их помощью из квазистатических уравнений Максвелла найти создаваемое ими магнитное поле. Путем наложения начального поля и магнитного поля, создаваемого поверхностными токами, получим окончательное выражение для невозмущенного магнитного поля, претерпевающего разрыв на поверхности $x_3=h$. Этим разрывом обусловлено появление магнитного давления $\vec{P}_0$, определяемого формулой

$$\vec{P}_0=-\frac{H_1\cos\omega t}{2\pi}(H_0+H_1\cos\omega t)\vec{n}_0, \tag{1.1}$$

где $\vec{n}_0$—единичный вектор внешней нормали к недеформированной поверхности пластинки.

Под действием нагрузки $\vec{P}_0$ пластинка совершает вынужденные колебания по форме цилиндрической поверхности с образующими параллельными координатной линии ox_2. Вследствие этих колебаний появляются индуцированные токи и магнитное поле, приводящие к возникновению добавочных объемных и поверхностных сил. Добавочные силы выражаются через неизвестные граничные значения тангенциальных компонент индуцированного магнитного поля на поверхностях $x_3=\pm h$. Определение указанных граничных значений, как и в работах ([2-4]), сводится к решению задач Неймана в полупространствах $|x_3|>h$. При помощи известного решения задачи Неймана найдены добавочные объемные и поверхностные силы, выраженные через прогиб пластинки. После подстановки (1.1) и найденных выражений для добавочных сил в уравнение движения пластинки, полученное на основе гипотез Кирхгофа в работе (4), анализ динамического поведения пластинки в нестационарном магнитном поле сводится к решению следующего интегро-дифференциального уравнения с ядром Коши:

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4}+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+2\rho h\varepsilon\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{h}{2\pi}\Big[(H_0+H_1\cos\omega t)^2+$$

$$+H_1^2\cos^2\omega t\Big]\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\frac{1}{\pi h}\int_{-a}^{a}\frac{\partial w}{\partial\xi}\,\frac{d\xi}{\xi-x_1}\right]=-\frac{H_1}{2\pi}(H_0+H_1\cos\omega t)\cos\omega t, \qquad (1.2)$$

при обычных условиях закрепления краев пластинки.

В (1.2) $w(x_1, t)$ — прогиб, $D=2Eh^3/3(1-\nu^2)$ — цилиндрическая жесткость, E — модуль упругости, ν — коэффициенг Пуассона, ε — коэффициент линейного затухания, ρ — плотность материала пластинки.

2. В качестве примера рассмотрим задачу о колебаниях пластинки, длинные стороны которой жестко защемлены.

Представляя искомый прогиб пластинки в виде $w(x_1, t)=f(t)(a^2-x_1^2)^2$, удовлетворим граничным условиям жесткого защемления, а из уравнения (1.2) методом Галеркина получим следующее линейное дифференциальное уравнение с периодическими коэффициентами:

$$\frac{d^2 f}{dt^2}+\varepsilon\frac{df}{dt}+\Omega^2(1+2\mu_1\cos\omega t+2\mu_2\cos 2\omega t)f=$$

$$=\delta(\mu_2+\mu_1\cos\omega t+\mu_2\cos 2\omega t), \qquad (2.1)$$

где

$$\Omega^2=[1+\beta(H_0^2+H_1^2)]\Omega_0^2, \quad \Omega_0^2=\frac{63D}{4\rho h a^4},$$

$$\beta=\frac{3}{4\pi\rho a^2\Omega_0^2}\left(1+\frac{35}{24\pi}\frac{a}{h}\right), \quad \delta=-\frac{\Omega^2}{48\pi\beta D}, \qquad (2.2)$$

$$\mu_1=\frac{\beta H_0 H_1}{1+\beta(H_0^2+H_1^2)}, \quad 2\mu_2=\frac{\beta H_1^2}{1+\beta(H_0^2+H_1^2)},$$

В (2.1) Ω_0 — частота собственных поперечных колебаний пластинки в отсутствие магнитного поля, Ω — частота магнитоупругих колебаний, μ_1 и μ_2 — коэффициенты пульсации.

Общее решение уравнения (2.1) складывается из общего решения однородного уравнения

$$\frac{d^2f}{dt^2}+\varepsilon\frac{df}{dt}+\Omega^2(1+2\mu_1\cos\omega t+2\mu_2\cos 2\omega t)f=0 \qquad (2.3)$$

и какого-нибудь частного решения уравнения (2.1), характеризующего вынужденные колебания.

Уравнение (2.3) имеет периодические коэффициенты и, как известно ([5,6]), при некоторых соотношениях между его коэффициентами оно имеет неограниченно возрастающие решения, означающие динамическую неустойчивость рассматриваемой системы.

Границы областей динамической неустойчивости $\omega_*^{\pm}$, расположенных вблизи частот 2Ω и Ω, при весьма малом затухании $(\varepsilon\to 0)$, согласно ([6]), определяются следующими приближенными формулами:

для области, расположенной вблизи частоты 2Ω,

$$\omega_*^{\pm}=2\Omega_0[1+\beta(H_0^2+H_1^2)\pm\beta H_0 H_1]^{1/2} \qquad (2.4)$$

для области, расположенной вблизи частоты Ω,

$$\omega_*^{\pm}=\Omega_0\left[1+\beta(H_0^2+H_1^2)\pm\frac{1}{2}\beta H_1^2\right]^{1/2}. \qquad (2.5)$$

Из формул (2.4), (2.5) следует: а) при любом $H_1\neq 0$ возможно появление параметрического резонанса (при $H_1=0$, как и следовало ожидать, параметрический резонанс невозможен); б) если $H_0=0$, то параметрический резонанс наступает при частотах внешнего магнитного поля, близких к значениям $\omega=\Omega/k$ $(k=1, 2, 3\ldots)$; в) ширины обеих областей неустойчивости являются монотонно возрастающими функциями амплитуды H_1 нестационарной части внешнего магнитного поля; г) при фиксированном H_1 ширина области (2.4) является монотонно возрастающей, а ширина области (2.5) — монотонно убывающей функцией постоянной составляющей H_0 заданного магнитного поля.

Переходим к исследованию вынужденных колебаний пластинки, для простоты ограничиваясь случаем $H_0=o$ (тогда и $\mu_1=o$). В этом случае частное решение уравнения (2.1), характеризующее вынужденные колебания, ищем в виде ([6])

$$f(t)=b_0+a_1\sin 2\omega t+b_1\cos 2\omega t \qquad (2.6)$$

где b_0, a_1 и b_1 некоторые постоянные, подлежащие определению.

Подставляя (2.6) в уравнение (2.1) (при $\mu_1=o$) и приравнивая коэффициенты при $\sin 2\omega t$ и $\cos 2\omega t$, а также свободные члены, получим неоднородную систему линейных алгебраических уравнений относительно b_0, a_1 и b_1. Указанные уравнения решаются в предположении, что определитель системы отличен от нуля. В результате для постоянной составляющей динамического прогиба $A_0=a^4b_0$ и амплитуды колебания $A=a^4\sqrt{a_1^2+b_1^2}$ центра $(x_1=o)$ пластинки получим следующие выражения:

$$A_0=\frac{\delta\mu_2 a^4}{\Omega^2}\left[1-\frac{\mu_2(1-2\mu_2)(1-n^2)}{(1-n^2)(1-n^2-2\mu_2^2)+(n\Delta/\pi)^2}\right]; \qquad (2.7)$$

$$A=\frac{\mu_2(1-2\mu_2)a^4}{48\pi\beta D}\,\frac{\sqrt{(1-n^2)^2+(\Delta n/\pi)^2}}{(1-n^2)(1-n^2-2\mu_2^2)+(n\Delta/\pi)^2}, \qquad (2.8)$$

где
$$n = \frac{2\omega}{\Omega}, \quad \Delta = \frac{2\pi\varepsilon}{\Omega}.$$

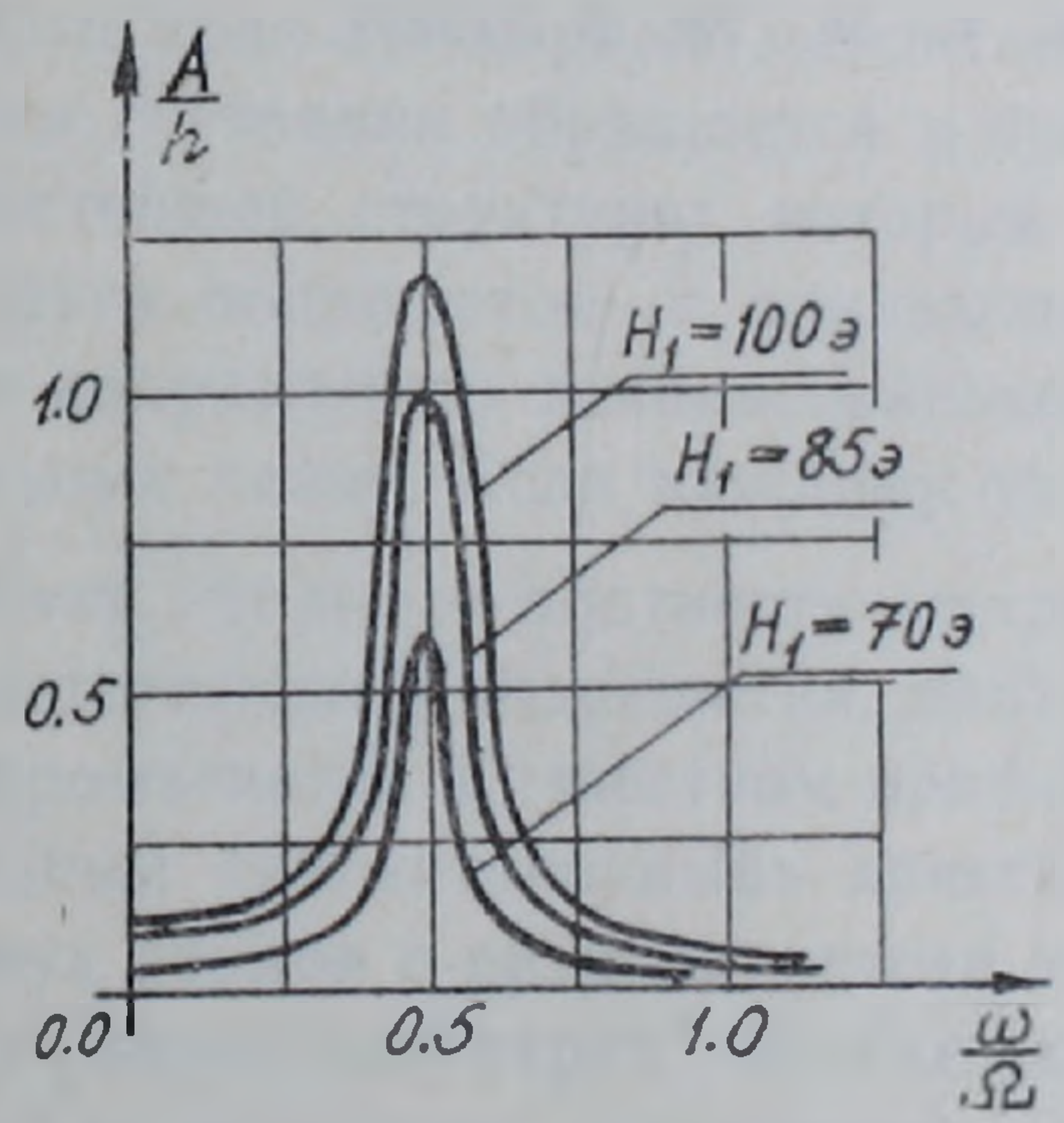
Последняя величина представляет собой декремент затухания собственных магнитоупругих колебаний пластинки.

Из условия, что знаменатель выражений (2.7) и (2.8) отличен от нуля, определяем следующее множество значений коэффициента пульсации μ_2:

$$0 \leqslant \mu_2 < \sqrt{\Delta/\pi}, \tag{2.9}$$

при которых система находится вне второй области динамической неустойчивости (области, расположенной около частоты $\omega = \Omega/2$).

На основании уравнения (2.8) произведены вычисления амплитуды вынужденных колебаний пластинки в зависимости от частоты ω заданного магнитного поля при различных значениях амплитуды H_1, удовлетворяющие условию (2.9). Для расчета принято $E = 7 \cdot 10^{11}$ дин/см^2; $\nu = 0{,}36$; $\Delta = 0{,}1\pi$; $h/a = 5 \cdot 10^{-3}$. Результаты подсчета значений A/h приведены на рисунке.



Как видно из формулы (2.8) и графика, вблизи частоты внешнего магнитного поля, равной половине собственной частоты пластинки, даже для достаточно слабых магнитных полей ($H_1 < 10^2$э), происходит бурное увеличение амплитуды вынужденных колебаний. Формулы (2.7), (2.8) и численные расчеты показывают также, что амплитуда колебаний монотонно возрастает с увеличением как величины a/h, так и амплитуды H_1 внешнего магнитного поля. При $a \geqslant 10^2 h$ и $H_1 \geqslant 10^3$э амплитуда вынужденных колебаний может в несколько сотен раз превосходить толщину пластинки. Это свидетельствует о необходимости в таких случаях решать задачу на основе нелинейных уравнений магнитоупругости тонких пластин, полученных в работе ([7]).

Институт механики Академии наук
Армянской ССР

Գ. Ե. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ

Իդեալական հաղորդիչ սալի ստիպողական և պարամետրական տատանումները ոչ ստացիոնար մագնիսական դաշտի ազդեցության տակ

Աշխատանքում հաստատված է, որ ոչ ստացիոնար մագնիսական դաշտի օգնությամբ կարելի է իդեալական հաղորդիչ սալին հաղորդել ռեզոնանսային (ինչպես սովորական, այնպես էլ պարամետրական) տատանումներ։ Ստացված են բանաձևեր պարամետրական ռեզոնանսի կրիտիկական հաճախականությունների և ստիպողական տատանումների ամպլիտուդաների որոշման համար։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Электродинамика сплошных сред, Наука, М., 1982. [2] *S. Kaliski*, Proc. Vibr. Probl., v. 3, N 4 (1962). [3] *С. А. Амбарцумян, Г. Е. Багдасарян, М. В. Белубекян*, Магнитоупругость тонких оболочек и пластин, Наука, М., 1977. [4] *Г. Е. Багдасарян*, Прикладная механика, т. 19, № 12 (1983). [5] *В. А. Якубович, В. М. Старжинский*, Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения, Наука, М., 1972. [6] *В. В. Болотин*, Динамическая устойчивость упругих систем, Гостехиздат, М., 1956. [7] *Г. Е. Багдасарян, З. Н. Даноян*, Изв. АН АрмССР. Механика, т. 38, № 2 (1985).