МАТЕМАТИКА

УДК 517.53

Г. Г. Геворкян

О единственности интегралов Фурье, сходящихся в метриках L_p , $p > 0$, на каждом конечном интервале

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 28/III 1986)

Теорема Планшереля утверждает, что если $f(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$,

$$\text{то } \text{l.i.m.}_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a f(t) e^{itx} dt = \hat{f}(x),$$

где l.i.m. обозначает предел в смысле сходимости в L_2 при $a \rightarrow +\infty$, имеет место формула обращения

$$f(x) = \text{l.i.m.}_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a \hat{f}(t) e^{-itx} dt \text{ и } \|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2.$$

В частности, из того, что интегралы $\int_{-a}^a f(t) e^{itx} dt$ сходятся к нулю в метрике $L_2(-\infty, +\infty)$ при $a \rightarrow +\infty$, следует, что $f(x) = 0$ п. в. на $(-\infty, +\infty)$.

Из одной теоремы А. А. Талаляна (см. (1), теорема 3) следует, что существует неэквивалентная нулю измеримая функция $f(x)$, обладающая тем свойством, что для любого отрезка $[-c, c]$ и любого $\epsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [-c, c]$, $\mu E > 2c - \epsilon$, на котором функции

$$f_a(x) = \int_{-a}^a f(t) e^{itx} dt \quad (1)$$

сходятся к нулю в метрике $L_2(E)$ при $a \rightarrow +\infty$.

В связи с этим А. А. Талаляном была поставлена следующая задача. Пусть функции (1) сходятся к нулю на каждом отрезке $[-b, b]$ в метрике $L_1[-b, b]$ при $a \rightarrow +\infty$. Следует ли из этого, что $f(x) = 0$ п. в. на $(-\infty, +\infty)$?

В этой заметке дается положительный ответ на этот вопрос.

А именно, верна следующая

Теорема 1. Если $f(t) \in L_p[-a, a]$, для некоторого $p \geq 1$, при любом $a > 0$ и $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a f(t) e^{itx} dt = g(x)$ в метрике $L_p[-b, b]$, на каждом отрезке $[-b, b]$, то интегралы

$$\varphi_\sigma(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} \left(1 - \frac{|u|}{\sigma}\right) g(u) e^{-iux} du$$

стремятся к $f(x)$ почти всюду и в метрике $L_p[-a, a]$ на любом ограниченном отрезке $[-a, a]$, когда $\sigma \rightarrow +\infty$.

Для доказательства теоремы нам нужна следующая

Лемма 1. Пусть функция $F(x) = F_1(x) + iF_2(x)$ имеет конечную вариацию на каждом отрезке $[-a, a]$. Если интегралы

$$\int_{-a}^a e^{itx} dF(x) \quad (2)$$

на множестве $[-1, 1]$ сходятся в метрике $L_p[-1, 1]$ для некоторого $p > 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sup_{|h| \leq 1} |F(x+h) - F(x)| = 0. \quad (3)$$

Доказательство. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a e^{itx} dF(x) &= \int_0^a \cos tx d(F_1(x) - F_1(-x)) - \int_0^a \sin tx d(F_2(x) + F_2(-x)) + \\ &+ i \int_0^a \cos tx d(F_2(x) - F_2(-x)) + i \int_0^a \sin tx d(F_1(x) + F_1(-x)) = \\ &= I_1(t) + I_2(t) + i(I_3(t) + I_4(t)). \end{aligned}$$

Из того, что интегралы (2) сходятся в метрике $L_p[-1, 1]$, следует сходимость их действительной части $I_1(t) + I_2(t)$. Будет сходиться также $I_1(-t) + I_2(-t)$, которая равна $I_1(t) - I_2(t)$, так как $I_1(t)$ — четная функция, а $I_2(t)$ — нечетная. Из этого следует, что сходится $I_1(t)$. Точно так же можно доказать, что сходятся интегралы $I_j(t)$, $j=2, 3, 4$. Итак, интегралы

$$\begin{aligned} \int_0^a \cos tx d(F_1(x) - F_1(-x)), & \quad \int_0^a \sin tx d(F_2(x) - F_2(-x)), \\ \int_0^a \cos tx d(F_2(x) - F_2(-x)), & \quad \int_0^a \sin tx d(F_1(x) + F_1(-x)) \end{aligned} \quad (4)$$

сходятся в метрике $L_p[-1, 1]$.

Обозначим $\varphi(x) = F_1(x) - F_1(-x)$. Легко видеть, что

$$\int_a^b \cos tx d\varphi(x) = \cos bt \cdot [\varphi(b) - \varphi(a)] + t \int_a^b \sin tx \cdot [\varphi(x) - \varphi(a)] dx.$$

Для любого a можно найти такое b , что $|b-a| \leq 1$ и $\sup_{|b| \leq 1} |\varphi(a+h) -$

$-\varphi(a)| \leq \frac{101}{100} |\varphi(b) - \varphi(a)|$. Тогда

$$\left| \int_a^b \cos tx d\varphi(x) \right| \geq |\cos bt| |\varphi(b) - \varphi(a)| - \frac{101}{100} |t| |\varphi(b) - \varphi(a)| =$$

$$|\varphi(b) - \varphi(a)| \left| |\cos bt| - \frac{101}{100} |t| \right|. \quad (5)$$

Если интегралы (2) сходятся в L_p , $p > 1$, то сходятся и в L_1 . Поэтому для доказательства леммы нам достаточно доказать, что из сходимости интегралов (2) в метрике L_p , для некоторого $p \leq 1$, следует (3). Допустим, интегралы (2) сходятся в метрике $L_p \left[0, \frac{1}{2} \right]$, $0 < p \leq 1$. Тогда левая часть (5) должна сходиться к нулю в метрике $L_p \left[0, \frac{1}{2} \right]$ для того же p , $0 < p \leq 1$, когда a стремится к $+\infty$. Из этого и из того, что (см. (5))

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left| \int_a^b \cos tx d\varphi(x) \right|^p dt \geq |\varphi(b) - \varphi(a)|^p \int_0^{\frac{1}{2}} \left| |\cos bt| - \frac{101}{100} |t| \right|^p dt \geq$$

$$\geq 2^{p-1} |\varphi(b) - \varphi(a)|^p \left[\int_0^{\frac{1}{2}} |\cos bt| dt - \frac{101}{100} \int_0^{\frac{1}{2}} t dt \right] \geq 2^{p-1} \left(\frac{1}{\pi} - \frac{101}{800} \right) |\varphi(b) - \varphi(a)|^p,$$

следует, что $|\varphi(b) - \varphi(a)| \rightarrow 0$, когда $a \rightarrow +\infty$.

Таковыми же методами можно доказать, что требованиям леммы удовлетворяют функции $F_2(x) + F_2(-x)$, $F_2(x) - F_2(-x)$ и $F_1(x) + F_1(-x)$. Следовательно, функция $F(x) = F_1(x) + iF_2(x)$ удовлетворяет (3). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Легко видеть, что

$$\varphi_\sigma(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} \left(1 - \frac{|u|}{\sigma} \right) g(u) e^{-iux} du = v \cdot p \cdot \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \frac{\sigma t}{2}}{\sigma t^2} dF(x+t), \quad (6)$$

где $F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$.

Пусть a_j нуль функции $\left(\frac{\sin^2 \frac{\sigma t}{2}}{\sigma t^2} \right)'$ на интервале $\left(\frac{2\pi}{\sigma} j, \frac{2\pi}{\sigma} (j+1) \right)$.

Легко видеть, что на отрезках $\left[\frac{2\pi}{\sigma} j, a_j \right]$, $\left[a_j, \frac{2\pi}{\sigma} (j+1) \right]$, $j=1, 2, \dots$,

функция $\left(\frac{\sin^2 \frac{\sigma t}{2}}{\sigma t^2} \right)'$ не меняет свой знак. Тогда, интегрируя по частям, получим

$$\left| \int_{\frac{2\pi}{\sigma}}^{+\infty} \frac{\sin^2 \frac{\sigma t}{2}}{\sigma t^2} dF(x+t) \right| \leq \sum_{j=[\sigma]}^{\infty} \left| \int_{\frac{2\pi}{\sigma} j}^{a_j} \frac{\sin^2 \frac{\sigma t}{2}}{\sigma t^2} dF(x+t) \right| + \sum_{j=[\sigma]}^{\infty} \left| \int_{a_j}^{\frac{2\pi}{\sigma}(j+1)} \frac{\sin^2 \frac{\sigma t}{2}}{\sigma t^2} dF(x+t) \right| \leq \quad (7)$$

$$\leq \sum_{j=[\sigma]}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{\sigma a_j}{2}}{\sigma a_j^2} \left\{ |F(x+a_j) - F(x+\xi_j)| + |F(x+a_j) - F(x+\xi_j^*)| \right\},$$

где ξ_j и ξ_j^* некоторые точки, соответственно, из отрезков $\left[\frac{2\pi}{\sigma} j, a_j \right]$ и

$\left[a_j, \frac{2\pi}{\sigma} (j+1) \right]$. Из (7) следует, что

$$\left| \int_{\frac{2\pi}{\sigma}}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{\sigma t}{2}}{\sigma t^2} dF(x+t) \right| \leq 2 \sum_{j=[\sigma]}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{\sigma a_j}{2}}{\sigma a_j^2} \sup_{\frac{2\pi}{\sigma} j < t_1 < t_2 \leq \frac{2\pi}{\sigma} (j+1)} |F(x+t_1) - F(x+t_2)|. \quad (8)$$

Точно так же можно получить

$$\left| \int_{-\infty}^{-\frac{2\pi}{\sigma}} \frac{\sin^2 \frac{\sigma t}{2}}{\sigma t^2} dF(x+t) \right| \leq 2 \sum_{j=[\sigma]}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{\sigma a_j}{2}}{\sigma a_j^2} \sup_{\frac{2\pi}{\sigma} j < t_1 < t_2 \leq \frac{2\pi}{\sigma} (j+1)} |F(x-t_1) - F(x-t_2)|. \quad (9)$$

Учитывая (3) и $\sum_{j=[\sigma]}^{\infty} \frac{1}{\sigma a_j^2} = O(1)$, из (8), (9) получим

$$v \cdot p \cdot \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \frac{\sigma t}{2}}{\sigma t^2} dF(x+t) = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{2\pi}{\sigma}}^{\frac{2\pi}{\sigma}} \frac{\sin^2 \frac{\sigma t}{2}}{\sigma t^2} f(x+t) dt + o(1), \quad (10)$$

где $o(1)$ равномерно на любом конечном отрезке. Из (10) и (6) следует утверждение теоремы 1.

Можно доказать аналог теоремы 1 для функций двух переменных. А именно, верна следующая

Теорема 2. Пусть $f(x, y) \in L_p([-a, a]^2)$, $p \geq 1$, при любом $a > 0$ и на каждом прямоугольнике $[-a_1, a_1] \times [-a_2, a_2]$

$$\lim_{\substack{\sigma_1 \rightarrow +\infty \\ \sigma_2 \rightarrow +\infty}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} dx \int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} e^{i(\alpha x + \beta y)} f(x, y) dy = g(\alpha, \beta) \text{ в метрике } L_p, p \geq 1. \quad (11)$$

Тогда верна следующая формула обращения:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\substack{\sigma_1 \rightarrow +\infty \\ \sigma_2 \rightarrow +\infty}} \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} \left(1 - \frac{|\alpha|}{\sigma_1}\right) \left(1 - \frac{|\beta|}{\sigma_2}\right) g(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\beta d\alpha$$

п. в. на $(-\infty, +\infty)^2$ и в метрике $L_p([-a, a]^2)$ на любом квадрате $[-a, a]^2$.

Замечание 1. Легко видеть, что для всех функций $f(x)$ из классов L_p , $1 \leq p \leq 2$, существует

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a e^{itx} f(t) dt \text{ в метрике } L_p[-b, b] \text{ на каждом отрезке } [-b, b]. \quad (12)$$

Однако (12) имеет место и для других функций. Например, на любом отрезке $[-b, b]$ интегралы

$$\int_{-a}^a e^{itx} e^t \sin e^{2t} dt$$

сходятся равномерно.

Замечание 2. Повторяя рассуждения работы 1, можно построить неэквивалентную нулю локально интегрируемую функцию $f(x)$, для которой интегралы $\int_{-a}^a e^{itx} f(t) dt$ сходятся к нулю на любом отрезке $[-b, b]$ в метрике $L_p[-b, b]$, $p < 1$.

Ереванский государственный университет

Կ. Գ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

Կամայական վերջավոր ինտերվալի վրա L_p , $p > 0$ մետրիկայով զուգամիտող Ֆուրյեի ինտեգրալների միակության վերաբերյալ

Աշխատանքում ապացուցված է.

թեորեմ 1. Եթե կամայական $a > 0$ և որևէ $p \geq 1$ համար $f(t) \in L_p[-a, a]$ և ամեն մի $[-b, b]$ հատվածի վրա ըստ $L_p[-b, b]$ մետրիկայի

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a f(t) e^{itx} dt = g(x), \text{ ապա՝}$$

$$\varphi_\sigma(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} \left(1 - \frac{|u|}{\sigma}\right) g(u) e^{-iux} du$$

ինտեգրալները համարյա ամենուրեք և ամեն մի $[-a, a]$ հատվածի վրա ըստ $L_p[-a, a]$ մետրիկայի ձգտում են $f(x)$ -ին, երբ $\sigma \rightarrow +\infty$:

Ճիշտ է թեորեմ 1-ի երկչափ առաջադրը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ А. А. Талаян, Мат. сб., т. 53 (95), № 3, с. 287—312 (1961).