ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXIV 1987 1

МАТЕМАТИКА

УДК 517.518.3

Г. А. Карагулян

О выделении подсистем сходимости с лакунарной плотностью номеров из произвольных ортонормированных систем

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 12/III 1986)

1. Известна следующая теорема, доказанная в 1936 г. независимо друг от друга Д. Е. Меньшовым и И. Марцинкевичем.

Теорема А (см. [1,2]). *Для любой ортонормированной системы (ОНС) $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x\in(0, 1)$, существуют номера $n_1<n_2<\ldots$ такие, что подсистема $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ является системой сходимости.* (ОНС $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ называется системой сходимости, если из условия $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2<\infty$ следует сходимость почти всюду ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$).

По этому поводу в работе [3] Г. Беннетом был поставлен следующий вопрос: существует ли последовательность чисел $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что из любой ОНС $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ можно извлечь подсистему сходимости $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$, для которой $\lim\limits_{k\to\infty} n_k/r_k=0$?

В работе [4] Б. С. Кашиным дан положительный ответ на этот вопрос. В ней сформулирована следующая

Теорема Б. *Из произвольной ОНС $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ можно извлечь подсистему сходимости $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ с $n_k<R_k$, $k=1, 2, \ldots$, где*

$$R_1=3,\ R_{k+1}=(R_k)!\quad (k=2, 3, \ldots).$$

В той же работе [4] Б. С. Кашин поставил следующий вопрос: можно ли в формулировке теоремы Б последовательность R_k, $k=1, 2, \ldots$ заменить на $k^{1+\varepsilon}$, $k=1, 2, \ldots$ для любого $\varepsilon>0$?

В настоящей работе усилен результат теоремы Б. Точнее, справедлива

Теорема. *Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$—произвольная ОНС и $\lambda>1$ некоторое число. Тогда существует подсистема сходимости $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ с условием*

$$n_k<\lambda^k,\ k=k_0, k_0+1, k_0+2, \ldots\ (k_0\geqslant 1).$$

Доказательство этой теоремы основано на следующих леммах.

Лемма 1. *Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{n}$, $x\in(0, 1)$, конечная ОНС и $\{E_i\}_{i=1}^{m}$ семейство измеримых множеств из (0, 1). Тогда существует целое число $1\leqslant k\leqslant n$ такое, что*

$$\frac{1}{\mu(E_p)}\left|\int_{\tilde{E}_p}\varphi_k(t)dt\right|\leqslant\sqrt{\frac{m}{n\cdot\min\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\mu(E_i)}},\quad p=1, 2, \ldots, m$$

(μ—мера Лебега на $(0, 1)$).

Лемма 2. *Пусть $E\subset(0, 1)$ есть некоторое измеримое множество положительной меры и $f(x)$—измеримая функция на $(0, 1)$ такая, что*

$$|f(x)|\leqslant M \text{ при } x\in(0, 1),\ f(x)=0 \text{ при } x\notin E.$$

Тогда существует такая последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x\in(0, 1)$, что

$$|f_n(x)|=10M \text{ при } x\in E,\ n=1, 2, \ldots,$$

$$f_n(x)=0 \text{ при } x\notin E,\ n=1, 2, \ldots,$$

$$\frac{\mu(E)}{2\sqrt{2}}\leqslant\mu\{f_n(x)=10M\}\leqslant\frac{\sqrt{2}\cdot\mu(E)}{2},\ n=1, 2, \ldots,$$

$$\frac{\mu(E)}{2\sqrt{2}}\leqslant\mu\{f_n(x)=-10M\}\leqslant\frac{\sqrt{2}\cdot\mu(E)}{2},\ n=1, 2, \ldots,$$

и $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ слабо сходится к $f(x)$ в $L^2(0, 1)$.

Лемма 3. *Пусть $E\subset(0, 1)$ есть измеримое множество положительной меры, а $f(x)$—всюду конечная функция из $L^2(0, 1)$ такая, что*

$$f(x)=0 \text{ при } x\notin E.$$

Тогда существуют слабо сходящаяся к $f(x)$ в $L^2(0, 1)$ последовательность функций $f^{(n)}(x)$, $n=1, 2, \ldots$, и такие семейства измеримых множеств $\{E_i^{(n)}\}_{i=1}^{\infty}$, $n=1, 2, \ldots$, что для любого $n=1, 2, \ldots$, функция $f^{(n)}(x)$ постоянна на каждом множестве $E_i^{(n)}$, $i=1, 2, \ldots$ и выполняются следующие соотношения:

$$f^{(n)}(x)=0 \text{ при } x\notin E,\ n=1, 2, \ldots,$$

$$\|f^{(n)}\|_{L^2(0,1)}\leqslant 20\|f\|_{L^2(0,1)},\ n=1, 2, \ldots,$$

$$E_i^{(n)}\cap E_j^{(n)}=\varnothing \text{ при } i\neq j,$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i^{(n)}=E,\ n=1, 2, \ldots,$$

$$\mu(E)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k+3}\leqslant\mu(E_k^{(n)})\leqslant\mu(E)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k+2},\ k=1, 2, \ldots.$$

Лемма 4. *Пусть $\{E_{i_1\ldots i_n},\ i_1, \ldots, i_n\in N\}$ $(n\geqslant 1)$ семейство измеримых множеств из $(0, 1)$, удовлетворяющее условиям*

$$\bigcup_{i_1,\ldots,i_n\in N}E_{i_1\ldots i_n}=(0, 1),$$

$$E_{i_1\ldots i_n}\cap E_{j_1\ldots j_n}=\varnothing \text{ при } (i_1, \ldots, i_n)\neq(j_1, \ldots, j_n),$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{i_1+\ldots+i_n+3n}\leqslant\mu(E_{i_1\ldots i_n})\leqslant\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{i_1+\ldots+i_n+2n},$$

для любых $i_1, \ldots, i_n \in N$. *Тогда обозначая* $A = \left\{ (i_1, \ldots, i_n);\ \mu(E_{i_1 \ldots i_n}) > \frac{1}{2^{10n}} \right\}$, *имеем*

$$\mu\left(\bigcup_{(i_1, \ldots, i_n) \in A} E_{i_1 \ldots i_n}\right) > 1 - c \cdot \alpha^n \quad (0 < \alpha < 1),\ |A| < 2^{10n},$$

где $0 < \alpha < 1$ *и* $c > 0$ *абсолютные постоянные, а* $|A|$ *есть количество элементов множества* A.

II. Известно, что из любой ортонормированной системы можно извлечь подсистему безусловной сходимости (см. [5]). Тем не менее, для наперед заданных номеров $1 < N(1) < N(2) < N(3) < \ldots$ можно построить такую ортонормированную систему $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, что для любых номеров $1 < n_1 < n_2 < n_3 < \ldots,\ n_k \leqslant N(k),\ k = 1, 2, \ldots$ существует перестановка членов системы $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что переставленная система является системой расходимости. Для этого определим зависящие от последовательности $\{N(k)\}_{k=1}^{\infty}$ номера $\{R(k)\}_{k=1}^{\infty}$ следующим образом:

$$R(1) = N(1),\ R(k+1) = N(R(k)+1),\ k = 1, 2, \ldots. \tag{1}$$

Определим также числа l_k, $k = 1, 2, \ldots$

$$l_1 = R(1),\ l_{k+1} = R(2^{l_1} + \ldots + 2^{l_k} + 1),\ k = 1, 2, \ldots; \tag{2}$$

построим систему $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Если $n \leqslant l_1 (= R(1))$, полагаем

$$\varphi_n(x) = r_n(x),\ n = 1, 2, \ldots, l_1, \tag{3}$$

где $\{r_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$—система Радемахера. Если же $n \geqslant l_1$, то однозначно определяются числа $k \geqslant 1$ и $0 \leqslant i \leqslant 2^{l_{k+1}} - 1$ такие, что

$$R(2^{l_1} + \ldots + 2^{l_k} + i) < n \leqslant R(2^{l_1} + \ldots + 2^{l_k} + i + 1). \tag{4}$$

Тогда определим функцию $\varphi_n(x)$ следующим образом:

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\left|\Delta_{i+1}^{(l_k)}\right|^{\frac{1}{2}}} \cdot \chi_{\Delta_{i+1}^{(l_k)}}(x) \cdot r_n(x) \quad (n \geqslant l_1), \tag{5}$$

где $\Delta_i^{(k)} = (i - 1/2^k,\ i/2^k)$ есть двоичный интервал Хаара, а $\chi_{\Delta_i^{(k)}}(x)$—ее характеристическая функция.

Итак, система $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ построена, и очевидно, что она является ортонормированной. Если $\{n_k\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность номеров с условием $n_k \leqslant N(k)$, $k = 1, 2, \ldots$, то, учитывая определение чисел $R(k)$ (см. (1)), легко усмотреть, что для любого $k = 1, 2, \ldots$ существует хотя бы одно число $m_k \in \{n_l\}_{l=1}^{\infty}$ такое, что $R(k) < m_k \leqslant R(k+1)$. Чтобы доказать, что $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ не является системой безусловной сходимости, достаточно доказать аналогичное для системы $\{\varphi_{m_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ $(\subset \{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty})$. Из условия $R(k) < m_k \leqslant R(k+1)$, имея в виду определение системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ (см. (2–5)) легко убедиться, что $\{\varphi_{m_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ станет подсистемой некоторой системы типа Хаара $\tilde{\chi}_0^{(0)}, \tilde{\chi}_i^{(n)}$, $i = 1, 2, \ldots, 2^n$, $n = 1, 2, \ldots$ (опр. системы типа Хаара см. [6], с. 122), причем она составлена из функций $\tilde{\chi}_1^{(0)}$, $\chi_i^{(l_k)}$, $i = 1, 2, \ldots, 2^{l_k}$, $k = 1, 2, \ldots$. Отсюда следует, что система $F_j^{(k)}$, $j = 1, 2, \ldots, 2^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, определенная равенствами

$$F_j^{(k)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2^{n_k-k}}}\sum_{l=(j-1)\cdot 2^{n_k-k}+1}^{j\cdot 2^{n_k-k}}\widetilde{\chi}_i^{(l_k)}(x), \tag{6}$$

$$j=1, 2, \ldots, 2^k, \ k=0, 1, 2, \ldots$$

тоже является системой типа Хаара, но другого вида (в ней не участвует только первая функция $F_0^{(0)}\equiv 1$). Поэтому существует ряд по этой системе, с коэффициентами из l^2, который расходится почти всюду после некоторой перестановки членов (см. [6], с. 112). В силу (6) этот ряд можно рассматривать как ряд по системе $\{\{\widetilde{\chi}_i^{(l_k)}\}_{i=1}^{2^{l_k}}\}_{k=1}^{\infty}$ и, следовательно, по системе $\{\varphi_{m_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$. Очевидно, что этот ряд будет рядом с коэффициентами из l^2 и расходится почти всюду после некоторой перестановки.

Автор благодарен профессору А. А. Талаляну за постоянное внимание к работе.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Գ. Ա. ԿԱՐԱԳՈՒԼՅԱՆ

Ընդհանուր օրթոնորմավորված համակարգերից լակունար խտության համարներով ենթահամակարգերի ընտրության մասին

Աշխատանքի առաջին մասում ձևակերպվում է հետևյալ առաջադրությունը.

Թեորեմ. Կամայական $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ օրթոնորմավորված համակարգից կարելի է ընտրել այնպիսի $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ զուգամիտության ենթահամակարգ, որի համար $n_k<\lambda^k$, $k=1, 2, \ldots$, որտեղ $\lambda>1$ նախապես տրված թիվ է:

Երկրորդ մասում՝ նախապես տրված $1<N_1<N_2<\ldots$ համարների համար կառուցվում է այնպիսի $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ համակարգ, որ եթե $n_k\leqslant N_k$, $k=1, 2, \ldots$ ինչ-որ ենթահամարներ են, ապա $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ոչ պայմանական զուգամիտության համակարգ չէ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *D. Menchoff*, Bull de la Soc. Math. de France, № 3—4 (64) (1936). [2] *J. Marcinkiewicz*, Studia Math., 6, 39—45 (1936). [3] *G. Bennett*, In: Notes in Banach spaces—Austin: University of Texas Press, 1980. [4] *Б. С. Кашин*, Усп. мат. наук, № 3 (40), 181—182 (1985). [5] *J. Komlos*, Arkiv for Mat., 1(12), 41—49 (1974). [6] *Б. С. Кашин, А. А. Саакян*, Ортогональные ряды, Наука, М., 1984.