

УДК 517.948.35

МАТЕМАТИКА

В. А. Штраус

О дефинизируемом аналоге проблемы моментов Хаусдорфа

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 27/XI 1985)

Настоящая заметка посвящена интегральному (точнее—интегрополиномиальному) представлению вещественной последовательности $\{c_q\}_0^\infty$, которая может быть преобразована с помощью разностного выражения к позитивной последовательности $(^3)$ и, кроме того, имеет определенное ограничение на рост при $q \rightarrow \infty$ (точные определения см. ниже). Вопрос об интегральном представлении такой последовательности и назван здесь дефинизируемым аналогом проблемы моментов Хаусдорфа. Сходные проблемы уже рассматривались в целом ряде работ (см. обзор $(^2)$, а также более поздние работы $(^3-5)$), однако содержащиеся в настоящем сообщении результаты отличаются от известных как классом изучаемых последовательностей, так и некоторыми особенностями их представления. По поводу классической проблемы моментов Хаусдорфа см. $(^1)$.

Определение. Вещественная последовательность $\{c_q\}_0^\infty$ называется (строго) дефинизируемой (деф.), если найдутся такие числа $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$, что последовательность $\{\bar{c}_q\}_0^\infty$: $\bar{c}_q = \sum_{p=0}^n \gamma_p c_{p+q}$ будет позитивной.

Пусть $\{\alpha_i\}_1^\nu$ —некоторое конечное множество точек отрезка $\Delta = [-1; 1]$. Будем говорить, что заданная на множестве $\Delta \setminus \{\alpha_i\}_1^\nu$ функция $\rho(t)$ кусочно-монотонна на нем, если это множество можно разбить на конечное число промежутков, на каждом из которых она монотонна и, кроме того, для любого $x \in (-1; 1) \setminus \{\alpha_i\}_1^\nu$ существуют конечные односторонние пределы $\rho(x-0)$ и $\rho(x+0)$; при этом для определенности будем считать, что $\rho(x) = \frac{1}{2}(\rho(x-0) + \rho(x+0))$. Если $x = \pm 1 \in \{\alpha_i\}_1^\nu$, то в этой точке также существуют соответствующие односторонние пределы. Точку $x \in \Delta \setminus \{\alpha_i\}_1^\nu$ назовем точкой изменения для $\rho(t)$, если в любой окрестности этой точки $\rho(t) \neq \text{const}$.

Теорема 1. Пусть деф. последовательность $\{c_q\}_0^\infty$ такова, что при некотором $\varepsilon > 0$

$$c_q = O(q^\varepsilon), \quad q \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Тогда найдутся такие числа $\{\xi_j\}_1^\mu$, $\xi_j \neq \bar{\xi}_j$, $|\xi_j| \leq 1$, $j = 1, 2, \dots, \mu$, $\{\alpha_i\}_1^\nu$, $\alpha_i = \bar{\alpha}_i$, $|\alpha_i| \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, \nu$; натуральные числа $\{m_j\}_1^\mu$, $\{n_i\}_1^\nu$ и опре-

деленная на $[-1; 1] \setminus \{a_i\}_1^v$ кусочно-монотонная функция $\rho(t)$, число точек изменения которой бесконечно, что

$$c_q = \sum_{k=0}^M a_k^{(q)} c_k + \int_{-1}^1 (t^q - P_q(t)) d\rho(t), \quad (2)$$

где $M = -1 + \sum_{j=1}^u m_j + \sum_{i=1}^v n_i$, $P_q(z) = \sum_{k=0}^M a_k^{(q)} z^k$ — интерполяционный многочлен для z^q с узлами интерполяции $\{\xi_j\}_1^u$ и $\{a_i\}_1^v$ кратности $\{m_j\}_1^u$ и $\{n_i\}_1^v$ соответственно. Интеграл в (2) понимается в несобственном смысле с особыми точками $\{a_i\}_1^v$. Обратно, если последовательность $\{c_q\}_0^\infty$ допускает представление (2), то она дефинируема и удовлетворяет условию (1).

Наметим доказательство. Из условия (1) следует, что на пространстве $\mathcal{S}$ финитных последовательностей вида $\bar{z} = \{z_q\}_0^\infty$ можно определить скалярное произведение $(\bar{z}, \bar{\eta}) = \sum_{q=0}^\infty (q+1)^{s+1} z_q \bar{\eta}_q$ и эрмитово-

билинейную форму $[\bar{z}, \bar{\eta}] = \sum_{p,q=0}^\infty z_p \bar{\eta}_q c_{p+q}$ так, что оператор $A: A\bar{z} = \{0,$

$\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots\}$ является непрерывным вместе с формой $[\cdot, \cdot]$ по отношению к введенной гильбертовой норме, имеет спектральный радиус, равный единице, симметричен относительно формы $[\cdot, \cdot]$ и дефинируем (2.6) относительно нее многочленом $Q(z) = \sum_{k=0}^n \gamma_k z^k$. Далее, ис-

пользуя некоторые результаты М. Г. Крейна (7), можно ввести на $\mathcal{S}$ новое скалярное произведение так, что пространство $\mathcal{Q}$, получающееся из $\mathcal{S}$ после пополнения его по новой норме и, возможно, факторизации полученного пространства по его изотропной относительно $[\cdot, \cdot]$ части, будет J -пространством, а определенный на $\mathcal{Q}$ оператор $\bar{A}$, индуцированный оператором A , — непрерывным оператором с тем же спектральным радиусом. Поскольку $\bar{A}$ — это дефинируемый самосопряженный оператор, то у него существует J -ортогональная спектральная функция с конечным множеством критических точек (6), сосредоточенных к тому же в замкнутом единичном круге.

Далее, как следует из некоторых результатов П. Йонаса (8), если $f(z)$ — функция, регулярная в некоторой окрестности спектра оператора $\bar{A}$, $\{\xi_j\}_1^u$ — его невещественный спектр, $\{a_i\}_1^v$ — критические точки спектральной функции E_λ , то можно подобрать системы натуральных чисел $\{m_j\}_1^u$ и $\{n_i\}_1^v$ так, что

$$f(\bar{A}) = P_f(\bar{A}) + \int_{-1}^1 (f(\lambda) - P_f(\lambda)) dE_\lambda, \quad (3)$$

где $P_f(z)$ — интерполяционный многочлен для $f(z)$ с узлами интерполяции $\{\xi_j\}_1^u$ и $\{a_i\}_1^v$, причем кратность узлов ξ_j и a_i равна m_j и n_i соответственно (выбор m_j и n_i не зависит от f). Из представления (3) непосредственно следует представление (2), если $\rho(t) = [E_t x, x]$, x —

элемент из Ω , соответствующий последовательности $\{1; 0; 0; \dots\}$ из $\mathcal{S}$. Тем самым доказательство прямого утверждения теоремы завершено. Справедливость обратного утверждения вытекает непосредственно из вида представления (2).

Рассмотрим теперь связанную с последовательностью $\{c_q\}_0^\infty$, удовлетворяющей условию (1), регулярную функцию $F(z)$, определенную в области $|z| > 1$ по формуле $F(z) = \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \dots$, а затем регулярно продолженную в область $|z| \leq 1$.

Теорема 2. *Последовательность $\{c_q\}_0^\infty$ допускает представление (2) в том и только том случае, когда $F(z)$ представима в виде*

$$F(z) = \frac{1}{Q(z)} \left\{ - \sum_{q=0}^M c_q \sum_{p=q}^M b_{p+1} z^{p-q} + \int_{-1}^1 \frac{Q(t)}{t-z} d\rho(t) \right\}, \quad (4)$$

где $Q(z) = \sum_{q=0}^{M+1} b_q z^q = \prod_{j=1}^{\mu} \prod_{i=1}^{\nu} (z - \xi_j)^{m_j} (z - \alpha_i)^{n_i}$, остальные элементы те же, что и в (2).

Остановимся теперь на вопросе о единственности элементов представления (2). Отметим, прежде всего, что функция $\rho(t)$ определяется с точностью до кусочно-постоянного слагаемого, скачки которого сосредоточены в точках из $\{\alpha_i\}_1^{\nu}$. Что касается узлов интерполяционного многочлена $P_q(z)$, то существует единственная минимальная по M (т. е. с учетом кратности) их совокупность, при которой еще возможно представление (2). Любая другая совокупность узлов интерполяции, связанная с представлением (2), является расширением указанной минимальной совокупности. Представление (2) с минимальным множеством узлов интерполяции будем называть неприводимым. Элементы неприводимого представления однозначно (с учетом сказанного выше относительно $\rho(t)$) восстанавливаются по поведению функции $F(z)$ в окрестности ее особых точек. В частности, $\{\xi_j\}_1^{\mu}$ — это система невещественных полюсов функции $F(z)$, а $\{m_j\}_1^{\mu}$ — соответствующая совокупность их порядков. Далее, пусть $\Gamma(\tau, \upsilon)$ — прямоугольный контур, симметричный относительно вещественной оси $\mathbf{R}$, ограничивающий замкнутую область, не содержащую точек из $\{\xi_j\}_1^{\mu}$, и пересекающий $\mathbf{R}$ в точках τ и υ . Тогда с точностью до кусочно-постоянного слагаемого

$$\rho(t) = - \frac{1}{2\pi i} \int_{-(1+\delta)}^t F(z) dz, \quad \delta > 0, \quad (5)$$

где интеграл понимается в смысле главного значения с особыми точками $(-(1+\delta), 0)$ и $(t, 0)$. Наконец, система $\{\alpha_i\}_1^{\nu}$ состоит из тех точек из $[-1; 1]$, для которых выполняется одно из условий: 1) функция $\rho(t)$ не ограничена в любой окрестности точки α_i ; 2) найдется такое натуральное n , что существует и отличен от нуля предел $\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Gamma(\alpha_i - \delta, \alpha_i + \delta)} (z - \alpha_i)^n F(z) dz$, а кратность узла интерполяции n_i — это

наименьшее из натуральных чисел, для которых одновременно выполнены условия:

$$1) \text{ существует } \eta > 0: \left| \int_{a_i - \eta}^{a_i + \eta} (t - x_i)^n d\rho(t) \right| < \infty;$$

$$2) \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Gamma(a_i - \delta, a_i + \delta)} (z - x_i)^n F(z) dz = 0,$$

где интегралы трактуются так же, как и в (2) и (5).

В заключение укажем, что аналогично проблеме моментов Хаусдорфа могут быть рассмотрены и дефинизируемая тригонометрическая проблема моментов и ее интегро-полиномиальное представление, по форме близкое к (2).

Челябинский политехнический институт
им. Ленинского комсомола

Վ. Ա. ՇՏՐԱՈՒՍ

Հանուղորժի մոմենտների պրոբլեմի դեֆինիզացվող անալոգի մասին

Աշխատանքում ապացուցվում է իրական թվերի հաջորդականության խնդիր-բազմանդամային ներկայացման վերաբերյալ թեորեմ, երբ գոյություն ունի որոշակի ձևափոխություն, որն այդ հաջորդականությունը դարձնում է դրական որոշյալ հաջորդականություն:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Н. И. Ахиезер, Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею, М., физматгиз, 1962. ² Т. Я. Азизов, И. С. Исхвидов, в сб.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 17 (1979). ³ М. G. Krein, H. Langer, Wiss. Beitr. M.—Luther-Univ. Halle-Wittenberg, № 14 (1979). ⁴ М. G. Krein, H. Langer, Beitr. Anal., № 15 (1981). ⁵ И. С. Исхвидов, Укр. мат. журн., т. 35, № 6 (1984). ⁶ H. Langer, Lect. Notes Math., 948 (1982). ⁷ М. Г. Крейн, Журн. Ин-та математики АН УССР, № 9 (1947). ⁸ P. Jonas, Beitr. Anal., № 16 (1981).