ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXIV 1987 1

УДК 519.632

МАТЕМАТИКА

Г. Д. Андреасян

Суперсходимость метода конечных элементов для одномерных краевых задач высокого порядка

(Представлено академиком А. А. Самарским 14/V 1985)

Известно [1], что для конечноэлементных решений U одномерных эллиптических задач $2m$-го порядка имеет место следующая оценка скорости сходимости:

$$\|u-U\|_{H^r(I)}\leqslant ch^{k+1-r}\|u\|_{H^{k+1}(I)},\quad m\geqslant r\geqslant 2m-(k+1), \tag{1}$$

где u—точное решение, k—порядок конечных элементов, $I=[0, 1]$, и эти оценки неулучшаемые. Однако в работе [2] установлена суперсходимость производных приближенного решения порядка $r=0, \ldots, m-1$ в точках, являющихся концами конечных элементов $I_i=[x_{i-1}, x_i]$, со скоростью $O(h^{2(k+1-m)})$, а в [3] на I_i найдены $k-2m+1$ точек, в которых конечноэлементное решение сходится с порядком $k+2$, и $k-2m+2$ других точек, в которых с порядком $k+1$ сходится производная приближенного решения.

В настоящей работе показано, что на конечном элементе I_i существуют $k-2m+r+1$ внутренних точек, где производная порядка $r=0, \ldots, m$ приближенного решения сходится с порядком $k+2-r$, т. е. на один порядок выше, чем глобальный порядок сходимости (1). Указанные точки есть нули полинома Якоби $P^{m-r,m-r}_{k-2m+r+1}$ на I_i. При $r=m$ и $k=m-1$ эти точки совпадают с точками Гаусса и Лобатто соответственно. Более того, порядок сходимости $k+2-r$ сохраняется и для производных более высокого порядка $r=m, \ldots, k$ в $k+1-r$ точках на каждом I_i. Эти точки — нули полинома $P^{r-m,r-m}_{k-r+1}$ на I_i. Тем самым, для производных порядка $m-r$ и $m+r$, при $r=0, \ldots, m$, точки суперсходимости совпадают.

1. *Обозначения и определения*. Пусть $I=[0, 1]$. Обозначим через $W^m_p(I)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$ пространства Соболева. При $p=2$ будем писать $H^m(I)$ вместо $W^m_2(I)$, а при $m=0-L_p(I)$ вместо $W^0_p(I)$. Норму в $W^m_p(I)$ обозначим через $\|\cdot\|_{W^m_p}$, а полунорму — через $|\cdot|_{W^m_p}$. Пусть

$$H^m_0(I)=\{v\in H^m(I)/v^{(l)}(0)=v^{(l)}(1)=0,\quad l=\overline{0, m-1}\},$$

где $v^{(l)}=\dfrac{d^lv}{dx^l}$, а $l=\overline{0, m-1}$ означает, что l принимает целочисленные значения от 0 до $m-1$. Разобьем отрезок I на конечные элементы $I_i=[x_{i-1}, x_i]$, а множество их концов обозначим через $\delta=\{0=$

$=x_0, x_1, \ldots, x_N=1\}$. Пусть $h_i=x_i-x_{i-1}>0$ и $h=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant N} h_i$. Для $k\geqslant 2m-1$ определим пространство

$$\mathcal{M}_0^{k,m}(\delta)=\{v\in H_0^m(I)/v\in P_k(I_i),\ \ i=\overline{1,N}\},$$

где $P_k(I_i)$—сужение на I_i пространства многочленов степени не выше k. Скалярное произведение в $L_2(I)$ обозначим через $(\cdot,\cdot)$, а в $L_2(I_i)$—через $(\cdot,\cdot)_i$. Норму и полунорму в $W_p^m(I_i)$ обозначим через $\|\cdot\|_{W_p^m(i)}$ и $|\cdot|_{W_p^m(i)}$. Введем также следующие нормы:

$$|||\cdot|||_{W_p^m}\begin{cases}\left[\sum\limits_{i=1}^{N}\|\cdot\|^p_{W_p^m(i)}\right]^{1/p}, & 1\leqslant p<\infty\\ \max\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\|\cdot\|_{W_\infty^m(i)}, & p=\infty\end{cases}\qquad |||\cdot|||_{W_p^{-m}}=\sup_{0\neq\psi\in W_q^m(i)}\frac{|(\cdot,\psi)|}{|||\psi|||_{W_q^m(i)}},$$

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Пусть $P_n^{\alpha,\alpha}\equiv P_n^\alpha(t)$ полином Якоби, т. е.

$$P_n^\alpha(t)=\frac{(-1)^n}{n!}t^{-\alpha}(1-t)^{-\alpha}[t^{n+\alpha}(1-t)^{n+\alpha}]^{(n)},\ t\in I,\ n\geqslant 0,\ \alpha>-1.$$

Обозначим через $n_r=k+1-|r-m|-m$, $r=\overline{0,k}$. Пусть $t_j^{(r)}$, $j=\overline{1,n_r}$—нули полинома $P_{n_r}^{|m-r|}(t)$. Известно [4], что $t_j^{(r)}\in(0,1)$. На конечном элементе I_i, $i=\overline{1,N}$ определим точки Якоби следующим образом*:

$$x_{ij}^{(r)}=x_{i-1}+h_i t_j^{(r)},\ \ j=\overline{1,n_r}. \tag{2}$$

Так как в силу [4] $dP_n^\alpha(t)/dt=cP_{n-1}^{\alpha+1}(t)$, то при $r\leqslant m$ имеет место $x_{ij}^{(r)}<x_{ij}^{(r-1)}<x_{ij+1}^{(r)}$.

2. *Проекции на конечномерные пространства и их свойства.* Для $g\in H^m(I)$ определим проекцию $Pg\in P_k(I)$ так, что $(g-Pg)\in H_0^m(I)$ и для любого $v\in P_k(I)\cap H_0^m(I)$

$$((g-Pg)^{(m)},\ v^{(m)})=0. \tag{3}$$

Лемма 1. *Для любого $g\in P_{k+1}$ имеет место соотношение*

$$(g-Pg)^{(r)}(t_j^{(r)})=0,$$

где $t_j^{(r)}$, $j=\overline{1,n_r}$—нули полинома $P_{n_r}^{|m-r|}(t)$, $r=\overline{0,k}$.

Доказательство. Так как $(g-Pg)\in P_{k+1}(I)\cap H_0^m(I)$, то $(g-Pg)^{(r)}(t)=t^{m-r}(1-t)^{m-r}z(t)$, где $r=\overline{0,m}$, а $z(t)$—многочлен степени не выше n_r. Интегрируя (3) по частям $m-r$ раз, $r=\overline{0,m}$, получим

$$((g-Pg)^{(r)},\ v^{(2m-r)})=0,$$

т. е. $z(t)\in P_{n_r}(I)$ ортогонален с весом $t^{m-r}(1-t)^{m-r}$ любому многочлену $v^{(2m-r)}\in P_{n_r-1}(I)$. Но тогда, в силу [4], $z(t)$ пропорционален полиному Якоби $P_{n_r}^{m-r}(t)$, т. е. при $r=\overline{0,m}$ $(g-Pg)^{(r)}(t)\equiv ct^{m-r}(1-$

* При $r=0$ точки Якоби существуют лишь при $k\geqslant 2m$.

$-t)^{m-r}P_{n_r}^{m-r}(t)$ и при $r=\overline{m, k}$ $(g-Pg)^{(r)}=(P_{n_m}^{0})^{(r-m)}\equiv P_{n_r}^{r-m}$, что и доказывает лемму.

Определение 1. Назовем $P_h g\in M_0^{k,m}(\delta)$ H_0^m-проекцией функции $g\in H_0^m(I)$, если для любого $v\in M_0^{k,m}(\delta)$

$$((g-P_h g)^{(m)},\ v^{(m)})=0. \tag{4}$$

Лемма 2. *Пусть* $g\in W_\infty^{k+1}(I)\cap H_0^m(I)$, *тогда имеют место оценки:*

$$\|g-P_h g\|_{W_\infty^l}\leqslant c h^{k+1-l}\|g\|_{W_\infty^{k+1}},\quad m\geqslant l\geqslant 2m-(k+1).. \tag{5}$$

Доказательство. Так как $(P_h g)^{(m)}\in M_0^{k-m,0}(\delta)$ есть L_2-проекция функции $g^{(m)}\in L_2(I)$, то из [5] (лемма 4.2) получим

$$\|g^{(m)}-(P_h g)^{(m)}\|_{L_\infty}\leqslant c h^{k+1-m}\|g\|_{W_\infty^{k+1}}.$$

Отсюда, используя прием Нитше и рассуждая аналогично [5] (лемма 4.3), получим (5) для остальных $l=\overline{2m-(k+1),\ m-1}$.

Лемма 3. *Для любых* $i=\overline{1, N-1}$ *и* $l=\overline{0, m-1}$ *имеет место равенство*

$$(g-P_h g)^{(l)}(x_i)=0.$$

Доказательство. Представляя решение задачи

$$u^{(2m)}(x)=f(x),\ x\in I,\ u^{(l)}(0)=u^{(l)}(1)=0,\ l=\overline{0, m-1}$$

при помощи функции Грина [6] и выполняя интегрирование по частям, находим, что

$$u(x)=\int_0^1 u^{(2m)}(t)G(x, t)dt=(-1)^m\int_0^1 u^{(m)}(t)\frac{\partial^m}{\partial t^m}G(x, t)dt.$$

Полагая здесь $u=g-P_h g$ и дифференцируя полученное соотношение $l=\overline{0, m-1}$ раз по x, с учетом (4) и того, что $\left.\frac{\partial^{l+m}}{\partial x^l\partial t^m}G(x,\ \cdot)\right|_{x=x_i}\in$ $\in M_0^{k,m}(\delta)$, получим

$$(g-P_h g)^{(l)}(x_i)=(-1)^m\int_0^1(g-P_h g)^{(m)}(t)\frac{\partial^{m+l}}{\partial x^l\partial t^m}G(x_i, t)dt=0.$$

Лемма 4. *Пусть* $r=\overline{\max\{0, 2m-k\}, k}$ *и* $x_{i,j}^{(r)}$, $j=\overline{1, n_r}$, $i=\overline{1, N}$ *точки Якоби* (2). *Тогда для любой функции* $g\in W_\infty^{k+2}(I_i)$ *имеет место оценка*

$$|(g-P_h g)^{(r)}(x_{ij}^{(r)})|\leqslant c h_i^{k+2-r}|g|_{W_\infty^{k+2}(I)}. \tag{6}$$

Доказательство. Неравенство (6) докажем с использованием леммы Брэмбла—Гильберта [7]. Производя в (6) замену переменного $x=x_{i-1}+h_i t$, $t\in I$, будем иметь

$$|(\hat{g}-P_h g)^{(r)}(t_j^{(r)})|\leqslant c|\hat{g}|_{W_\infty^{k+2}}, \tag{7}$$

где $\hat{v}(t)\equiv v(x_{i-1}+h_i t)$. Предположим, что $\widehat{P_h g}=\widehat{Pg}$. Вводя в рассмотрение функционал $F(\hat{g})=(\hat{g}-P\hat{g})^{(r)}(t_j^{(r)})$, заключаем, что он ограничен в $W_\infty^{k+2}(I)$, т. е. $|F(\hat{g})|\leqslant c\|\hat{g}\|_{W_\infty^{k+2}}$ и в силу леммы 1 обращается в нуль на многочленах из $P_{k+1}(I)$. Тем самым, к нему применима лемма Брэмбла—Гильберта, т. е. $|F(\hat{g})|\leqslant c|\hat{g}|_{W_\infty^{k+2}}$ и неравенство (7) доказано. Докажем справедливость предположения $\widehat{P_h g}=P\hat{g}$. Из (4) следует, что для любого $v\in P_k(I_i)\cap H_0^m(I_i)$, продолженного нулем на I,

$$((g-P_h g)^{(m)}, v^{(m)})_i=0, \tag{8}$$

причем в силу леммы 3 $(g-P_h g)\in H_0^m(I_i)$. Заменив переменную $x=x_{i-1}+h_i t$ в (8), получим $((\hat{g}-\hat{P}_h g)^{(m)}, v^{(m)})=0$, $(\hat{g}-\hat{P}_h g)\in H_0^m(I)$, т. е. $\widehat{P_h g}=P\hat{g}$. Лемма доказана.

3. *Постановка задачи и оценка суперсходимости.* Рассмотрим задачу

$$Lu\equiv\sum_{l=0}^{m}(-1)^l(a_l(x)u^{(l)}(x))^{(l)}=f(x),\ x\in I,\ u^{(l)}(0)=u^{(l)}(1)=0,\ l=\overline{0, m-1}. \tag{9}$$

Пусть $B(u, v)=\sum_{l=0}^{m}(a_l(x)u^{(l)}(x), v^{(l)}(x))$ такая, что для любого $v\in H_0^m(I)$ $B(v, v)\geqslant c\|v\|^2_{H^m}$. Приближенным решением задачи (9) назовем такую функцию $U\in M_0^{k,m}(\delta)$, которая при любой $v\in M_0^{k,m}(\delta)$ удовлетворяет тождеству

$$B(U, v)=(f, v). \tag{10}$$

Лемма 5. *Пусть $k\geqslant 2m$, $r=\overline{0, k}$, u и U—решения задач* (9) *и* (10) *соответственно. Если $u\in W_\infty^{k+1}(I)$ то для достаточно малых h имеет место оценка*

$$\|(U-P_h u)^{(r)}\|_{L_\infty}\leqslant ch^{k+2-r}\|u\|_{W_\infty^{k+1}}. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $r=0$. Обозначим через φ решение задачи (9) с правой частью $\psi\in L_1(I)$. Будем предполагать, что имеет место оценка

$$\|\varphi\|_{W_1^{2m}}\leqslant c\|\psi\|_{L_1}. \tag{12}$$

Пусть $\eta=U-P_h u$, $\zeta=u-P_h u$, $\tilde{\varphi}=P_h\varphi$. Легко проверить, что

$$(\eta, \psi)=(\eta, L\varphi)=B(\eta, \varphi-\tilde{\varphi})+B(\zeta, \tilde{\varphi}). \tag{13}$$

Слагаемые в правой части (13) оценим по отдельности. Докажем сначала, что

$$|B(\eta, \varphi-\tilde{\varphi})|\leqslant ch\|\eta\|_{L_\infty}\|\varphi\|_{W_1^{2m}}. \tag{14}$$

Так как $a_m\eta^{(m)}=(a_m\eta)^{(m)}-\sum_{l=0}^{m-1}C_m^l a_m^{(m-l)}\eta^{(l)}$, то будем иметь

$$B(\eta, \varphi-\tilde{\varphi})=((a_m\eta)^{(m)}, (\varphi-\tilde{\varphi})^{(m)})-\sum_{l=0}^{m-1}C_m^l(a_m^{(m-l)}\eta^{(l)}, (\varphi-\tilde{\varphi})^{(m)})+$$

$$+\sum_{l=0}^{m-1}(a_l\eta^{(l)}, (\varphi-\tilde{\varphi})^{(l)}). \tag{15}$$

Пусть $v\in M_0^{k,m}(\delta)$ удовлетворяет условиям $v^{(l)}(x_i)=(a_m\eta)^{(l)}(x_i)$, $i=\overline{1, N-1}$, $l=\overline{0, m-1}$. Тогда, интегрируя по частям на каждом отрезке I_i, получим

$$((a_m\eta)^{(m)}, (\varphi-\tilde{\varphi})^{(m)})=((a_m\eta)^{(m)}-v^{(m)}, (\varphi-\tilde{\varphi})^{(m)})=\sum_{i=1}^{N}(-1)^m(a_m\eta-v, (\varphi-\tilde{\varphi})^{(2m)})_i\leqslant c\max_{1\leqslant i\leqslant N}\|a_m\eta-v\|_{L_\infty(i)}\sum_{i=1}^{N}\|(\varphi-\tilde{\varphi})^{(2m)}\|_{L_1(i)}. \tag{16}$$

Рассуждая аналогично ([5]), будем иметь

$$\inf_v\|a_m\eta-v\|_{L_\infty(i)}\leqslant ch_i^{k+1}\|(a_m\eta)^{(k+1)}\|_{L_\infty(i)}\leqslant ch_i^{k+1}\sum_{j=1}^{k+1}\|a_m^{(j)}\|_{L_\infty(i)}\|\eta^{(k+1-j)}\|_{L_\infty(i)}.$$

Имея в виду обратные неравенства ([7]) $\|\eta^{(k+1-j)}\|_{L_\infty(i)}\leqslant ch_i^{-(k+1-j)}\|\eta\|_{L_\infty(i)}$, получим

$$\inf_v\|a_m\eta-v\|_{L_\infty(i)}\leqslant ch_i^{k+1}\sum_{j=1}^{k+1}\|a_m^{(j)}\|_{L_\infty(i)}\|\eta\|_{L_\infty(i)}\|\eta\|_{L_\infty(i)}h_i^{-(k+1-j)}\leqslant ch_i\|\eta\|_{L_\infty(i)}. \tag{17}$$

Таким образом, из (15)—(17) будем иметь

$$|B(\eta, \varphi-\tilde{\varphi})|\leqslant c\max_{1\leqslant i\leqslant N}\|a_m\eta-v\|_{L_\infty(i)}\sum_{i=1}^{N}\|(\varphi-\tilde{\varphi})^{(2m)}\|_{L_1(i)}+\|\eta\|_{L_\infty}|||\varphi-\tilde{\varphi}|||_{W_1^{2m-1}}\leqslant$$

$$\leqslant ch\|\eta\|_{L_\infty}\|\varphi\|_{W_1^{2m}}.$$

Докажем теперь, что

$$|B(\zeta, \tilde{\varphi})|\leqslant ch^{k+2}\|u\|_{W_\infty^{k+1}}|||\tilde{\varphi}|||_{W_1^{2m}}. \tag{18}$$

Пусть $\chi\in M_0^{k,m}(\delta)$. Как и в (15), интегрируя по частям на I_i, получим

$$B(\zeta, \tilde{\varphi})=\sum_{i=1}^{N}\Big\{(-1)^m(\zeta, (a_m\tilde{\varphi}-\chi)^{(2m)})_i-\sum_{l=0}^{m-1}(-1)^mC_m^l(\zeta, (a_m^{(m-l)}\tilde{\varphi}^{(l)})^{(m)})_i+$$

$$+\sum_{l=0}^{m-1}(-1)^l(\zeta, a_l\tilde{\varphi}^{(l)})^{(l)})_i\Big\}. \tag{19}$$

Аналогично (17) при $k\geqslant 2m$ получим $\inf_\chi\|(a_m\tilde{\varphi}-\chi)^{(2m)}\|_{L_1(i)}\leqslant ch_i\|\tilde{\varphi}\|_{W_1^{2m}}$. Отсюда и из (19) будем иметь

$$B(\zeta, \tilde{\varphi})\leqslant c(h\|\zeta\|_{L_\infty}+|||\zeta|||_{W_\infty^{-1}})|||\varphi|||_{W_1^{2m}}. \tag{20}$$

Так как $k\geqslant 2m$, то из (20), используя лемму 2, получим (18).

Итак, из (13), (14), (18) следует, что

$$|(\eta, \psi)|\leqslant c\{h\|\eta\|_{L_\infty}\|\varphi\|_{W_1^{2m}}+h^{k+2}\|u\|_{W_\infty^{k+1}}|||\tilde{\varphi}|||_{W_1^{2m}}\}.$$

Имея в виду, что $\|\eta\|_{L_\infty}=\sup_{\|\psi\|_{L_1}=1}|(\eta, \psi)|$, из (12) при достаточно малых h получим (11) при $r=0$. Утверждение леммы при $r=\overline{1, k}$ следует из обратных неравенств ([7]).

Теорема. *Пусть $k\geqslant 2m$, $u\in W_\infty^{k+1}(I)\cap W_\infty^{k+2}(I_i)$ — решение задачи* (9), *а U — решение задачи* (10). *Пусть $x_{ij}^{(r)}$ — точки Якоби* (2). *Тогда имеет место оценка*

$$|(u-U)^{(r)}(x_{ij}^{(r)})|\leqslant ch^{k+2-r}(\|u\|_{W_\infty^{k+2}(i)}+\|u\|_{W_\infty^{k+1}}).$$

Доказательство следует из лемм 4 и 5.

Автор благодарен В. Б. Андрееву за проявленное внимание к данной работе.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Հ. Ջ. ԱՆԴՐԵԱՍՅԱՆ

Վերջավոր էլեմենտների մեթոդի գերզուգամիտությունը բարձր կարգի միաչափ խնդիրների համար

Հոդվածում ցույց է տրվում, որ ամեն մի $I_i=[x_{i-1}, x_i]$ վերջավոր էլեմենտում գոյություն ունեն $k-2m+r+1$ ներքին կետեր, որտեղ $2m$-րդ կարգի խնդրի k-րդ աստիճանի վերջավոր էլեմենտային լուծման r-րդ ($r=0, \ldots, m$) կարգի ածանցյալը զուգամիտում է $O(h^{k+2-r})$ արագությամբ, այսինքն մի կարգով ավելի, քան զուգամիտության գլոբալ կարգը։

Բացի դրանից զուգամիտության $O(h^{k+2-r})$ արագությունը պահպանվում է նաև ավելի բարձր կարգի ածանցյալների համար ($r=m, \ldots, k$) $k+1-r$ կետերում։ Այդ կետերը $P^{(m-r),(m-r)}_{k+1-(r-m)-m}$, $r=\overline{0, k}$ Յակոբիի բազմանդամի զրոներն են, որոշված ամեն մի I_i-ի վրա։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Г. Стренг, Дж. Фикс*, Теория метода конечных элементов, Мир, М., 1977. [2] *M. Bakker*, SIAM J. Numer. Anal., v. 19, № 3 (1982). [3] *M. Bakker*, SIAN J. Numer. Anal., v. 21, № 1 (1984). [4] *Г. Бейтмен, А. Эрдейи*, Высшие трансцендентные функции, Наука, М., 1966. [5] *J. Jr. Douglas, T. Dupont, L. Wahlbin*, Math. comput., v. 29, № 130 (1977). [6] *М. А. Наймарк*, Линейные дифференциальные операторы, Наука, М., 1969. [7] *Ф. Сьярле*, Метод конечных элементов для эллиптических задач, Мир, М., 1980.