ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXIII 1986 5

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

А. А. Саакян

Градиентные алгоритмы синтеза (0,1)-матриц с различными строками

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 16/I 1986)

В данной работе рассматривается задача описания всевозможных разбиений подмножеств вершин n-мерного единичного куба, возникающая при решении дискретной изопериметрической задачи ([1]).

На языке (0, 1)—матриц задача заключается в следующем. Рассматривается класс U_S всех (0, 1)-матриц фиксированной размерности $m\times n$, все строки которых различны и которые содержат на i-ом столбце s_i единиц, $i=1, \ldots, n$, где $S=(s_1, \ldots, s_n)$—заранее фиксированный целочисленный вектор. Требуется исследовать вопросы существования и построения матриц из класса U_S.

Классы (0, 1)-матриц с фиксированным числом единиц на строках и столбцах ранее были исследованы Дж. Райзером, М. Кореном и др. В ([2]) получены простые необходимые и достаточные условия существования таких матриц, в ([3]) даны условия единственности этих матриц с точностью до перестановки строк и столбцов. ([1,4]) содержат некоторые необходимые условия на вектор S с непустым классом U_S. С другой стороны, возможно полное решение указанной задачи переборными алгоритмами, однако нас интересуют алгоритмы с простой реализацией (оценками), в связи с чем мы рассматриваем классы градиентных алгоритмов, которые строят матрицу $M\in U_S$ по последовательным столбцам. Построение k-го столбца основывается на множестве интервалов, составленных из строк и построенных на предыдущем шаге, внутри которых строки совпадают, а между которыми — различные.

Перейдем к описанию градиентных алгоритмов A_1 и A_2. При этом без ограничения общности мы будем считать, что $s_i\geqslant m-s_i$, $i=1, \ldots, n$, на основании того, что наши рассмотрения инвариантны относительно инвертирования столбцов рассматриваемых (0, 1)-матриц.

1. Рассматривается задача построения (0, 1)-матрицы M из m строк на основе вектора S при условии, что каждый достраиваемый новый столбец порождает максимальное число пар новых различных строк. Приведем рекуррентное определение алгоритма A_1. Построим первый столбец матрицы M, разместив на его первых S_1 строках единицы и на остальных $m-s_1$—нули. Пусть построены первые $k-1$ столбцов матрицы M, в результате чего строки матрицы разбиваются

на интервалы, внутри которых строки совпадают, а между которыми — различные. Построим k-ый столбец с s_k единицами.

Пусть $r_k = s_k - (m - s_k)$, l — число интервалов нечетной длины и r — число интервалов четной длины $k-1$-го шага. Построение k-го столбца выполним в два этапа — разместив при этом соответственно r_k „избыточные" единицы и остальные единицы по интервалам $k-$ -1-го шага.

I этап. Если $r_k \leqslant l$, то из интервалов нечетной длины произвольным образом выбираем r_k интервалов и r_k единиц распределяем по одной на эти интервалы. При $r_k > l$ из r_k единиц распределяем сначала по одной на каждый интервал нечетной длины. Оставшиеся единицы распределяем парами, начиная с интервалов четной длины и повторяя этот процесс циклически до полного исчерпания r_k единиц. Заметим, что после размещения первых l единиц остается четное число $r_k - l$ единиц и интервалы четной длины, так что процесс протекает корректно. II этап. К началу второго этапа при $r_k < l$ остается четное число $l - r_k$ интервалов нечетной длины, половине которых дается по одной единице, другой половине — по нулю. В оставшихся случаях имеются четные интервалы и равное число нулей и единиц, которыми эти интервалы разбиваются на две равные части.

Теорема 1. *В результате построения k-го шага алгоритм A_1 строит все разбиения интервалов $k-1$-го шага, в соответствии с максимизацией числа пар различных строк.*

2. Рассматривается задача построения (0, 1)-матрицы M на основе вектора S при условии, что каждый достраиваемый новый столбец порождает максимальное число новых строк, отличающихся от всех остальных. Перед тем как привести рекуррентное определение алгоритма A_2, рассмотрим одно вспомогательное утверждение. Пусть имеем p интервалов, q из этих интервалов имеет длину два, h — число интервалов длины больше двух и t — число единичных интервалов. Рассмотрим размещение заданных s единиц в этих интервалах. Для произвольного размещения обозначим через q' число тех интервалов длины два, в которые мы размещаем точно одну единицу.

Лемма 1. *При размещении s единиц в данные интервалы, если $q \geqslant m - s$ и $q' < m - s$ или $q < m - s$ и $q' < q$, то существует такое другое размещение s единиц, которое порождает большее число различных строк.*

Приведем также некоторые предварительные рассмотрения для случая $p < m - s$.

Распределим по одному нулю и единице на каждый интервал длины больше единицы и обозначим через $w_1, \ldots, w_h$ длины тех интервалов, которые получаются из интервалов длины больше двух после удаления двух присвоенных позиций. Обозначим через w число оставшихся нулей $w = m - s - h$. Рассмотрим уравнение

$$w_1 x_1 + \ldots + w_h x_h + x_{h+1} + \ldots + x_{h+t} = w \quad x_i \in \{0, 1\}. \tag{1}$$

Лемма 2. *Если множество всех решений уравнения (1) не пусто, то оно находится в однозначном соответствии с множеством размещений s единиц на p интервалы с максимизацией числа различных строк.*

Остается заметить, что (1) представляет хорошо известную задачу о рюкзаке ([5]), которая является NP-полной задачей.

Рассмотрим уравнения

$$w_1x_1+\ldots+w_{l-1}x_{l-1}+w_{l+1}x_{l+1}+\ldots+w_hx_h+x_{h+1}+\ldots+x_{h+l+w_l+2}=$$
$$=w+1,\quad l=1,\ldots,h \tag{1l}$$

Лемма 3. *Если* (1) *не имеет решений, то существует такое* l, *для которого* (1l) *имеет решение.*

Это означает, что можно построить размещение s единиц, в котором с каждого из интервалов $w_1, \ldots, w_{l-1}, w_{l+1}, \ldots, w_h$ выделяется одна новая строка и при этом остальные единицы размещаются на интервалах единичной длины и на w_l произвольным образом.

Перейдем теперь к описанию работы алгоритма A.

Построим первый столбец матрицы M, разместив на его первых s_1 строках единицы и на остальных $m-s_1$—нули. Пусть построены первые $k-1$ столбцов матрицы M, в результате чего строки матрицы разбиваются на p интервалов. Построим k-ый столбец с s_k единицами.

Рассмотрим несколько случаев.

а) $m-s_k\leqslant q$. Выбираем согласно лемме 1 $m-s_k$ интервалов длины два и распределяем на них по одному нулю и единице, все оставшиеся интервалы получают единицы.

б) $q<m-s_k\leqslant q+h$. На все интервалы длины два сначала распределяем по одному нулю и единице (согласно лемме 1), из h интервалов длины больше двух выбираем $h-(m-s_k-q)$ интервалов, которые получают по одному нулю, остальные интервалы получают единицы.

в) $q+h<m-s_k\leqslant p$. На все интервалы длины больше единицы распределяем по одному нулю, оставшиеся нули распределяем на интервалы единичной длины произвольным образом.

г) $m-s_k>p$. Составляем уравнение (1) по исходным данным $k-1$-го шага алгоритма. Согласно лемме 2, когда (1) имеет решение, построение проведем на основании этого решения. В противном случае по лемме 3 выбираем интервалы, которые порождают новые различные строки, а также интервал w_l, в котором размещение произвольное.

Теорема 2. *В результате построения k-го шага алгоритм A_2 строит все разбиения интервалов $k-1$-го шага, в соответствии с максимизацией числа различных строк.*

Рассмотрение следующего примера показывает, что алгоритмы A_1 и A_2 не оптимальны. $n=8$, $m=13$, $s_i=11$, $i=1, \ldots, 8$.

Работа построенных алгоритмов исследована также на специальных классах задач (векторов S) для уточнения полных возможностей этих алгоритмов.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Հ. Ա. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

Տարբեր տողերով (0,1)-մատրիցների սինթեզի գրադիենտ ալգորիթմներ

U_S-ով նշանակենք ֆիքսված $m \times n$ չափերով բոլոր (0, 1) մատրիցների դասը, որոնց տողերը տարբեր են և որոնք i-րդ սյունում պարունակում են s_i քանակությամբ մեկեր, $i=1, \ldots, n$, որտեղ՝ $S=(s_1, \ldots, s_n)$ նախապես ֆիքսված ամբողջարժեք վեկտոր է։ U_S դասից մատրիցի գոյության և կառուցման հարցերի ուսումնասիրության համար (ըստ S վեկտորի) դիտարկվում են A_1 և A_2 գրադիենտ ալգորիթմները։ Բերվում է A_1 և A_2 ալգորիթմների ոչ օպտիմալությունը ցույց տվող օրինակ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. А. Асланян*, Проблемы кибернетики, вып. 36, с. 85—126 (1979). [2] *Г. Дж. Райзер*, Комбинаторная математика, М., Мир, 1976. [3] *M. Koren*, J. Comb. Theory. № 3, 1976. [4] *Р. Г. Нигматуллин*, Дискретный анализ, вып. 9, Новосибирск, с. 47—58 (1967). [5] *Р. М. Карп*, Кибернетический сборник. Новая серия, вып. 12 (1975)