ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXIII 1986 5

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

Ю. Л. Шмульян

О некоторых классах мер, связанных с преобразованиями Фурье финитных функций

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 13/XI 1985)

1. Пусть $H^2=H^2(\Pi)$—класс Харди в открытой верхней полуплоскости Π. Борелеву меру ν в Π называют карлесоновой, если $H^2\subset L^2(\Pi; d\nu)$. Описание класса карлесоновых мер приведено в ((1), лекции VII и XI)). Пусть $a>0$, $W_a=H^2\ominus e^{iaz}H^2$. Класс W_a описывается формулой $\int\limits_0^a e^{itz}f(t)dt$, где f пробегает $L^2(0, a)$. Все функции класса W_a являются целыми.

Определение. Борелеву меру ν в замкнутой верхней полуплоскости $\overline{\Pi}$ назовем *полукарлесоновой,* если $W_a\subset L^2(\overline{\Pi}; d\nu)$. Легко проверить, что класс полукарлесоновых мер не зависит от a.

В настоящей статье дается описание этого класса, а также устанавливается связь полукарлесоновых мер с некоторыми известными классами мер и функций.

2. Рассмотрим сначала класс (A) полукарлесоновых мер с носителем на $\mathbf{R}$. Такие меры под названием допустимых были введены и исследованы В. Я. Лином в (2) (в более общей ситуации). Им было установлено предложение: для того чтобы мера σ на $\mathbf{R}$ принадлежала классу (A), необходимо и достаточно, чтобы $\sup\limits_{t\in R}\sigma([t, t+h])<\infty$ при некотором (тогда и при любом) $h>0$.

Теорема 1. *Для того чтобы мера σ на* R *принадлежала классу (A), необходимо и достаточно, чтобы* $\sup\limits_{t_2-t_1>h}\{\sigma([t_1, t_2])/(t_2-t_1)\}<\infty$ *при некотором (тогда и при любом)* $h>0$.

Следствие. Если $\sigma\in(A)$, то функции $\sigma([0, t])$ и $\sigma([-t, 0])$ возрастают не быстрее линейной функции при $t\to\infty$.

Утверждение, обратное следствию, неверно, как показывает пример чисто атомической меры с атомами n^2 меры n $(n=1, 2, \ldots)$.

Пусть σ—мера на $\mathbf{R}$, α—число >0, и

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(t)}{1+|t|^\alpha}<\infty. \quad \text{Для такой меры} \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(t)}{1+|t-x|^\alpha}<\infty$$

при произвольном $x\in\mathbf{R}$. Если последний интеграл — ограниченная функция от x, то меру σ будем относить к классу (B_α).

Теорема 2. *При всех* $\alpha>0$: $(B_\alpha)\subset(A)$. *Если же* $\alpha>1$, *то* $(B_\alpha)=(A)$.

3. Нижеследующая теорема 3 дает описание класса полукарлесоновых мер, указывая, в частности, на связь мер этого класса с карлесоновыми мерами и мерами класса (A).

Теорема 3. *Следующие утверждения о мере ν в $\overline{\Pi}$ эквивалентны:* а) *ν—полукарлесонова мера;*

б) *для любого $l>0$ мера ν_0 на* R, *определяемая равенством* $\nu_0(E)=\nu(E\times[0, l])$ (*E борелево, $E\subset$* R) *принадлежит классу* (A), *а сужение меры ν на полуплоскость $\overline{\Pi}_l=\{z:\operatorname{Im}z\geq l\}$ является карлесоновой мерой;*

в) *для любого $l>0$ и любой функции $g\in H^2$*

$$\int\limits_{\overline{\Pi}}|g(z+il)|^2 d\nu(z)<\infty;$$

г) *для любого $l>0$ функция* $H_\nu(\zeta)=\int\limits_{\overline{\Pi}}\frac{\eta d\nu(z)}{|z+\zeta|^2}$ $(\eta=\operatorname{Im}\zeta)$ *ограничена в $\overline{\Pi}_l$;*

д) *для любого $l>0$* $\sup\limits_{\substack{x\in R\\ h\geq l}}\left(\frac{\nu([x, x+h]\times[0, h])}{h}\right)<\infty.$

Теорема остается справедливой, если в утверждениях б) —д) заменить „для любого $l>0$" на „хотя бы для одного $l>0$".

Замечание. Сужение полукарлесоновой меры на открытую верхнюю полуплоскость не обязательно является карлесоновой мерой.

4. Функции класса H^2 имеют граничные значения почти всюду на вещественной оси R. Поэтому квадрат модуля функций этого класса можно интегрировать по мере ν в $\overline{\Pi}$, если сужение ν_R этой меры на R абсолютно непрерывно относительно меры Лебега. В этом предположении справедлива

Теорема 4. *Следующие утверждения о мере ν в $\overline{\Pi}$ эквивалентны:* а) $\int\limits_{\overline{\Pi}}|g(z)|^2 d\nu(z)<\infty$ $\quad(\forall g\in H^2)$;

б) *сужение меры ν на Π—карлесонова мера, а* $\frac{d\nu_R}{dt}$ — *ограниченная на* R *функция;*

в) *$H_\nu(\zeta)$—ограниченная в Π функция;*

г) $\sup\limits_{\substack{x\in R\\ h>0}}\left(\frac{\nu([x, x+h]\times[0, h])}{h}\right)<\infty.$

5. В настоящем пункте устанавливается связь мер класса (A) с классом R-функций ([3]). Пусть $F(z)$—R-функция,

$$F(z)=a+bz+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{t}{t^2+1}\right)d\sigma(t)\quad(z\in\Pi)\tag{1}$$

—ее интегральное представление,

$$v(z)=by+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{y\,d\sigma(t)}{|t-z|^2}\quad(z\in\Pi;\ y=\operatorname{Im}z)\tag{2}$$

—соответствующее представление гармонической в П функции $v(z)= =\operatorname{Im}F(z)$ $(\geqslant 0)$.

Теорема 5. *а) Для того чтобы в представлении* (2) *мера* σ *принадлежала классу* (A), *необходимо, чтобы при любом* $y>0$ *и достаточно, чтобы хотя бы при одном* $y>0$ *выполнялось условие*

$$\sup_{x\in R} v(x+iy)<\infty.$$

б) Для того чтобы в представлении (2) *выполнялись условия* $b=0$, $\sigma\in(A)$, *необходимо, чтобы при любом* $y_0>0$ *и достаточно, чтобы хотя бы при одном* $y_0>0$ *функция* $v(z)$ *удовлетворяла условию*

$$\sup_{\substack{x\in R\\ y\geqslant y_0}} v(x+iy)<\infty.$$

Нижеследующие теоремы 6—8 устанавливают связь роста на бесконечности функций $F(z)$ и $u(z)=\operatorname{Re}F(z)$ с принадлежностью меры σ в представлении (1) классу (A). Заметим сперва, что при $b=0$ справедлива оценка $F(z)=o(z)$ при $z\to\infty$ внутри угла $\Gamma_\delta=\left\{z:\left|\arg z-\frac{\pi}{2}\right|<\delta<\frac{\pi}{2}\right\}$.

Теорема. 6. *Если в представлении* (1) $b=0$, $\sigma\in(A)$, *то* $|F(z)|= =O(\ln|z|)$ *при* $z\to\infty$, $\operatorname{Im}z\geqslant y_0>0$.

Меру σ на **R** будем называть уравновешенной, если

$$\int_{-\tau}^{\tau}\frac{t\,d\sigma(t)}{t^2+1}\text{—ограниченная функция от } \tau.$$

Пусть $F(z)$—R-функция с представлением (1), $u(z)=\operatorname{Re}F(z)$.

Теорема 7. *Если* $\sigma\in(A)$, *то* $u(iy)$ *ограничена при* $y\to+\infty$ *тогда и только тогда, когда* σ*—уравновешенная мера.*

Теорема 8. *Если* $b=0$, $\sigma\in(A)$ *и* σ *-уравновешенная мера, то* $|F(z)|=O(1)$ *при* $z\to\infty$, $z\in\Gamma_\delta$.

Одесский институт инженеров морского флота

Յու. Լ. ՇՄՈՒԼՅԱՆ

Որոշ դասերի չափերի շուրջը՝ կապված ֆինիտ ֆունկցիաների Ֆուրյեի կերպափոխման հետ

Տրված է բոլոր ν չափերի բորելյան դասի նկարագրումը $\overline{\Pi}$ *փակ վերին կիսահարթությունում, որոնք այնպիսին են, որ բոլոր ֆինիտ ֆունկցիաների Ֆուրյեի կերպափոխումները* $L^2(-\infty,\infty)$*-ից պատկանում են* $L^2(\overline{\Pi}; d\nu)$*-ին: Հաստատված են այդ չափերի կարլեսոնյան կապերի* (1), (2)*-ի իմաստով թույլատրելի կապերի և* R*-ֆունկցիաների հետ* (3)*։*

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. К. Никольский*, Лекции об операторе сдвига, Наука, М., 1980. [2] *В. Я. Лин*, Мат. сб., т. 67 (109), № 4, с. 586—608 (1965). [3] *И. С. Кац, М. Г. Крейн*, Дополнение 1 к кн.: *Ф. Аткинсон*, Дискретные и непрерывные граничные задачи, Мир, М., 1968.