ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXXIII 1986 4

УДК 539.374

МЕХАНИКА

М. А. Задоян

Пластическое течение между шероховатыми коническими поверхностями

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 12/IV 1984)

Задача пластического течения материала между шероховатыми жесткими плитами в условиях плоской деформации впервые исследована Прандтлем (1). Далее теория течения идеально-пластического материала по жестким поверхностям развита и обобщена в работах (2-13) и др.

В статьях (8,9) впервые поставлена и исследована задача о течении пластического материала между коническими поверхностями. В этих исследованиях принимается, что конические поверхности шероховатые по кольцевому направлению и движутся с постоянными поперечными скоростями по этому же направлению.

В настоящей статье в сферических координатах рассматривается задача о течении несжимаемого идеально жесткопластического материала между двумерно-шероховатыми коническими поверхностями при их сближении с поперечными скоростями, изменяющимися по экспоненциальному закону по кольцевой координате (14). Принимается

$$v=\nu_1 re^{-\mu|\varphi|} \text{ при } \theta=\alpha, \quad v=-\nu_2 re^{-\mu|\varphi|} \text{ при } \theta=\beta,$$

где ν_i, β заданные положительные постоянные. В силу симметрии течения относительно плоскости $\varphi=0$ будем рассматривать область $0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0$ (рис. 1).

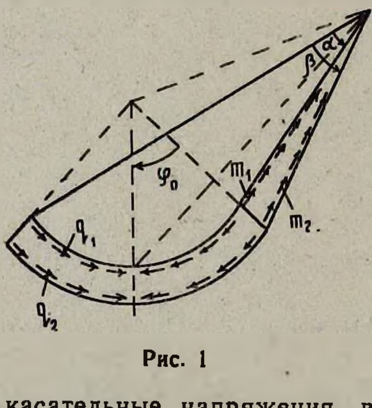

Рис. 1

Принимаем, что касательные напряжения, возникающие в конических поверхностях, заданы:

$$\tau_{r\theta}=m_1, \quad \tau_{\theta\varphi}=q_1 \quad \text{при} \quad \theta=\alpha;$$
$$\tau_{r\theta}=-m_2, \quad \tau_{\theta\varphi}=-q_2 \text{ при } \theta=\beta, \tag{1}$$

очевидно $m_i^2+q_i^2<1$.

Компоненты напряжения, отнесенные к пластической постоянной k и скорости перемещения, как в ([14]), представим в виде

$$\sigma_r=\sigma_\theta+\frac{6}{\Omega}f',\quad \sigma_\varphi=\sigma_\theta+\frac{6}{\Omega}(f'-f\operatorname{ctg}\theta-\mu\psi);$$

$$\sigma_\theta=-p_1+\mu\ln r-A(\varphi_0-\varphi)+6\int_\alpha^\theta(f'-f\operatorname{ctg}\theta-\mu\psi)\frac{\operatorname{ctg}\theta}{\Omega}d\theta-$$

$$-3\int_\alpha^\theta\tau_{r\theta}d\theta,\quad \tau_{r\theta}=\frac{1}{\Omega}(f'+f\operatorname{ctg}\theta+\mu\psi)'; \tag{2}$$

$$\tau_{\theta\varphi}=\frac{3}{\Omega}\left(\psi'\sin\theta+\mu\frac{f}{\sin\theta}\right),\qquad \tau_{r\varphi}=-\frac{\mu}{\Omega\sin\theta}(f'+f\operatorname{ctg}\theta+\mu\psi);$$

$$\Omega=\sqrt{(f'+f\operatorname{ctg}\theta+\mu\psi)'^2+9\left(\psi'\sin\theta+\frac{\mu f}{\sin\theta}\right)^2+\left(4+\frac{\mu^2}{\sin^2\theta}\right)\times}$$
$$\overline{\times(f'+f\operatorname{ctg}\theta+\mu\psi)^2+4(2f'-f\operatorname{ctg}\theta-\mu\psi)(f'-2f\operatorname{ctg}\theta-2\mu\psi)};$$

$$u=r(f'+f\operatorname{ctg}\theta+\mu\psi)e^{-\mu\varphi},\quad v=-3rfe^{-\mu\varphi},$$
$$w=3r\psi\sin\theta\, e^{-\mu\varphi}+\frac{D}{\mu}r\sin\theta, \tag{3}$$

где f и ψ произвольные функции θ, а p_1, M, A, D произвольные постоянные интегрирования.

Слагаемое $\frac{D}{\mu}r\sin\theta$ в соответствующем выражении w в работе ([14]) при вторичной редакции статьи автором опущено, так как оно не влияет на напряженное состояние. Однако оно необходимо для построения соответствующего возможного поля скоростей перемещений.

Приведенные выражения напряжений (2) и скорости перемещения (3) будут решениями системы уравнений теории пластичности, если функции f и ψ определить из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left[\frac{\sin\theta}{\Omega}(f'+f\operatorname{ctg}\theta+\mu\psi)'\right]'+\frac{6\sin\theta}{\Omega}(f'+f\operatorname{ctg}\theta+\mu\psi)+M\sin\theta=0;$$

$$\left[\frac{\sin^2\theta}{\Omega}\left(\psi'\sin\theta+\mu\frac{f}{\sin\theta}\right)\right]'-\mu\frac{\sin\theta}{\Omega}(f'+f\operatorname{ctg}\theta+\mu\psi)+\frac{A}{3}\sin\theta=0$$

или, учитывая представления (2),

$$(\tau_{r\theta}\sin\theta)'-\frac{6}{\mu}\tau_{r\varphi}\sin^2\theta+M\sin\theta=0;$$
$$(\tau_{\theta\varphi}\sin^2\theta)'+3\tau_{r\varphi}\sin^2\theta+A\sin\alpha=0. \tag{4}$$

Исключая отсюда $\tau_{r\varphi}$, а затем интегрируя полученное дифференциальное соотношение с использованием граничных условий (1) и вводя обозначения

$$A=B-\frac{1}{2}\mu M,\quad B=\frac{q_1\sin^2\alpha+q_2\sin^2\beta+\frac{1}{2}\mu(m_1\sin\alpha+m_2\sin\beta)}{\cos\alpha-\cos\beta} \tag{5}$$

$$C=\frac{q_1\sin^2\alpha\cos\beta+q_2\sin^2\beta\cos\alpha+\frac{1}{2}\mu\,(m_1\sin\alpha\cos\beta+m_2\sin\beta\cos\alpha)}{\cos\alpha-\cos\beta} \tag{6}$$

получаем $s=\tau-\frac{\mu}{2\sin\theta}\omega,\quad \tau=\frac{B\cos\theta-C}{\sin^2\theta}$, (7)

где $\tau_{\theta\varphi}=s,\quad \tau_{r\theta}=\omega$ (8)

Далее, вводя новую функцию $F(\theta)$

$$f'=F-f\operatorname{ctg}\theta-\mu\psi \tag{9}$$

и исключая из выражения Ω (2) производные f', F' и ψ', при помощи соотношений

$$F'=\omega\Omega; \tag{10}$$

$$\psi'=\frac{s}{3}\,\frac{\Omega}{\sin\theta}-\mu\frac{f}{\sin^2\theta} \tag{11}$$

получаем

$$\Omega=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{1-\omega^2-s^2}}\sqrt{\left(1+\frac{\mu^2}{12\sin^2\theta}\right)F^2+3(f\operatorname{ctg}\theta+\mu\psi)(f\operatorname{ctg}\theta+\mu\psi-F)}.$$

На боковых сечениях $\varphi=\pm\varphi_0$ отсутствуют внешние силы, поэтому $\int\limits_\alpha^\beta\sigma_\varphi(r,\theta,\varphi_0)d\theta=0$.

Подставляя сюда σ_φ из (2), получаем $M=0$, $B=A$,

$$p_1=\frac{6}{\beta-\alpha}\int\limits_\alpha^\beta(F-2f\operatorname{ctg}\theta-2\mu\psi)[1+(\beta-\theta)\operatorname{ctg}\theta]\frac{d\theta}{\Omega}-\frac{3}{\beta-\alpha}\int\limits_\alpha^\beta(\beta-\theta)\omega d\theta.$$

Из первого уравнения (4) следует

$$\omega'=-\omega\operatorname{ctg}\theta-6\frac{F}{\Omega}\sin\theta. \tag{12}$$

Для определения функций f, F, ω, ψ из системы дифференциальных уравнений (9)—(12) имеем граничные условия

$$f(\alpha)=-\nu_1/3,\quad f(\beta)=\nu_2/3,$$
$$\omega(\alpha)=m_1,\quad \omega(\beta)=-m_2. \tag{13}$$

После определения этих функций найдутся две компоненты напряжения (8), а остальные компоненты напряжения и скорости перемещения примут следующий вид:

$$\sigma_r=\sigma_0+\frac{6}{\Omega}(F-f\operatorname{ctg}\theta-\mu\psi),\quad \sigma_\varphi=\sigma_0+\frac{6}{\Omega}(F-2f\operatorname{ctg}\theta-2\mu\psi);$$

$$\sigma_\theta=-p_1-A(\varphi_0-\varphi)+6\int\limits_\beta^\theta(F-2f\,\mathrm{ctg}\,\theta-2\mu\psi)\frac{\mathrm{ctg}\,\theta d\theta}{\Omega}-3\int\limits_\beta^\theta\omega d\theta,$$

$$\tau_{r\varphi}=-\mu\frac{F}{\Omega\sin\theta} \tag{14}$$

$$u=rFe^{-\mu\varphi},\quad v=-3rfe^{-\mu\varphi},\quad w=3r\psi\sin\theta e^{-\mu\varphi}+\frac{D}{\mu}r\sin\theta. \tag{15}$$

Давление на контактной поверхности $\theta=\alpha$ на единицу длины вдоль r будет $P=-2r\sin\alpha\int\limits_0^{\varphi_0}(\sigma_\theta\cos\varphi-\tau_{\theta\varphi}\sin\varphi)|_{\theta=\alpha}d\varphi$. После вычисления получаем $P=2r\sin\alpha[\,p_1\sin\varphi_0+(1-\cos\varphi_0)(A+q_1)]$. Условие сохранения количества масс дает

$$\int\limits_0^r\int\limits_0^{\varphi_0}[v(r,\alpha,\varphi)\sin\alpha-v(r,\beta,\varphi)\sin\beta]rdrd\varphi=\int\limits_\alpha^\beta\int\limits_0^{\varphi_0}ur^2\sin\theta d\theta\,d\varphi+\int\limits_0^r\int\limits_\alpha^\beta w|_{\varphi=\varphi_0}rd\theta\,dr.$$

Подставляя здесь выражения скоростей перемещения из (15), определяем

$$D=\frac{1-e^{-\mu\varphi_0}}{\cos\alpha-\cos\beta}\left(\nu_1\sin\alpha+\nu_2\sin\beta-3\int\limits_\alpha^\beta F\sin\theta d\theta\right)-\frac{3e^{-\mu\varphi_0}\mu}{\cos\alpha-\cos\beta}\int\limits_\alpha^\beta\psi\sin\theta d\theta.$$

Случай гладких по направлению r конических поверхностей ($m_1=m_2=0$) впервые рассмотрен в работах [8,9], а затем в [14]. Хотя условия сближения конических поверхностей и [9] и [14] приняты различными, но выражения напряжения в них в рассматриваемом случае по существу совпадают.

Когда конические поверхности гладки по кольцевому направлению, то в (5)—(6) следует положить $q_1=q_2=0$. Это не внесет существенного упрощения в решение задачи, так как все компоненты напряжения и скорости перемещения отличны от тождественного нуля.

В случае двумерно-гладких конических поверхностей, т. е. когда $q_i=m_i=0$, получаем из (5)—(7)

$$A=B=C=0,\quad \tau(\theta)\equiv 0.$$

Тогда, полагая по всему объему тела $F=0$, получаем $\omega=s=0$, $\Omega=6f'$. Дифференциальные уравнения (10) и (12) превращаются в тождества, а из (9) и (11) следует система линейных дифференциальных уравнений $f'+f\,\mathrm{ctg}\,\theta+\mu\psi=0$ $\psi'\sin^2\theta+\mu f=0$. Исключая ψ, приходим к дифференциальному уравнению второго порядка

$$f''+f'\,\mathrm{ctg}\,\theta-\frac{1+\mu^2}{\sin^2\theta}f=0. \tag{16}$$

Полагая $f(\theta)=y(x)$, где $x=\mathrm{ctg}\,\theta$, получаем уравнение $(1+x^2)y''+xy'-(1+\mu^2)y=0$.

Далее, принимая $y(x)=z(\xi)$, где $\xi=\operatorname{arcsh}x$, будем иметь $z''-(1+\mu^2)z=0$, общее решение которого будет $z=c_1\operatorname{sh}\sqrt{1+\mu^2}\,\xi+c_2\operatorname{ch}\sqrt{1+\mu^2}\,\xi$.

Таким образом, если ввести обозначение $\Delta(\theta)=\sqrt{1+\mu^2}\operatorname{arcsh}(\operatorname{ctg}\theta)$, то общее решение (16) при граничных условиях (13) будет

$$f(\theta)=\frac{\nu_1\operatorname{sh}[\Delta(\theta)-\Delta(\beta)]+\nu_2\operatorname{sh}[\Delta(\theta)-\Delta(\alpha)]}{3\operatorname{sh}[\Delta(\beta)-\Delta(\alpha)]}.$$

Для рассматриваемого случая напряжения, скорости перемещения и давления будут

$$\sigma_r=\sigma_\theta+1,\quad \sigma_\varphi=\sigma_\theta+2,\quad \sigma_\theta=-p_1+2\ln\frac{\sin\theta}{\sin\alpha},$$

$$p_1=2+\frac{2}{\beta-\alpha}\int\limits_\alpha^\beta(\beta-\theta)\operatorname{ctg}\theta d\theta,\quad \tau_{r\theta}=\tau_{\theta\varphi}=\tau_{r\varphi}=u=0,$$

$$v=-3rfe^{-\mu\varphi},\quad w=\frac{r}{\mu}[D\sin\theta-3(f\sin\theta)'e^{-\mu\varphi}],$$

$$D=\frac{\nu_1\sin\alpha+\nu_2\sin\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}(1+2e^{-\mu\varphi_0}),\quad P=2p_1r\sin\alpha\sin\varphi_0.$$

Здесь, как и в прежних окончательных выражениях, напряжения и давления следует умножить на $k=\sigma_s/\sqrt{3}$, где σ_s предел текучести материала при растяжении.

На ЭВМ ЕС—1022 для значений параметров $\nu_1=3$, $\nu_2=4{,}2$, $\mu=2$, $m_1=0{,}15$, $m_2=0{,}2$, $q_1=0{,}2$, $q_2=0{,}25$, $\alpha=15^\circ$, $\beta=45^\circ$ получено численное решение системы уравнений (9)—(12) для граничных условий

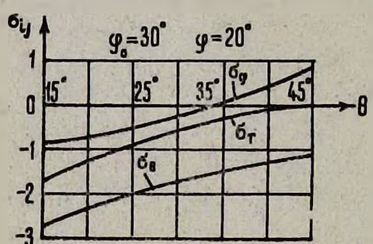

Рис. 2

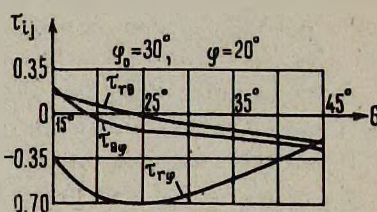

Рис. 3

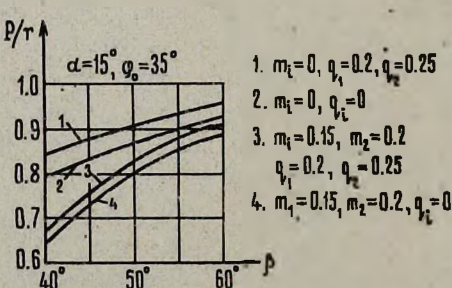

Рис. 4

(13), на основании которого на рис. 2. 3 приведены соответствующие графики напряжений (14). На рис. 4 показаны графики контактного ($\theta=\gamma$) удельного давления P_r для различных случаев шероховатостей конических поверхностей.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Մ. Ա. ԶԱԴՈՅԱՆ

Պլաստիկական հոսքը կոնական անհարթ մակերևույթների միջև

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է անսեղմելի իդեալական կոշտ պլաստիկական նյութի հոսքը, երբ կոնական անհարթ մակերևույթները մոտենում են իրար՝ տված արագությամբ։ Ընդունվում է, որ այդ արագությունները օղակային կոորդինատի ուղղությամբ փոփոխվում են էքսպոնենցիալ օրենքով, իսկ մակերևույթները անհարթ են ինչպես կոնի ծնիչի, այնպես էլ օղակային ուղղությամբ։

Խնդիրը ընդհանուր դրվածքով բերվում է սովորական ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի ինտեգրմանը համապատասխան եզրային պայմաններով։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *L. Prandtl*, ZAMM, B. 3, s. 401—406 (1923). [2] *A. Nadai*, Z. Phys. B. 30, H. 2, s. 106—138 (1924). [3] *Р. Хилл*, Математическая теория пластичности, Гостехиздат, М. 1956. [4] *В. В. Соколовский*, Теория пластичности, Высшая школа, М., 1968. [5] *А. А. Ильюшин*, ПММ, т. 18, вып. 8, с. 265—288 (1954). [6] *R. T. Shield*, J. Mech. and Phis. Solids, v. 3, № 4, p. 246—258 (1955). [7] *Д. Д. Ивлев*, Теория идеальной пластичности, М., Наука, 1966. [8]. *Д. Д. Ивлев*, Тр. НИИ Воронежского гос. ун-та, вып. 10, с. 1—3 (1973). [9] *Л. В. Ершов, Д. Д. Ивлев, А. В. Романов*. Современные проблемы механики и авиации, Машиностроение, М., 1982. [10] *Д. Д. Ивлев*, ДАН СССР, т. 123, № 6, с. 988—990 (1958). [11] *М. А. Задоян*, ДАН СССР, т. 156, № 1, с. 38—39 (1964). [12] *М. А. Задоян*, ДАН АрмССР, т. 39, № 5, с.265—269 (1964). [13] *С. С. Григорян*, ДАН СССР, т. 257, № 25, с. 1075—1076 (1981). [14] *М. А. Задоян*, ПММ, т. 47, вып. 2, с. 209—218 (1983).