ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXIII 1986 4

УДК 519.22

МАТЕМАТИКА

М. С. Гиновян

Об оценивании функционалов от спектральной плотности, имеющей нули

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. В. Амбарцумяном 22/X 1985)

1. Задача об асимптотически эффективном непараметрическом оценивании функционалов от спектральной плотности гауссовской стационарной последовательности рассматривалась в работе И. А. Ибрагимова и Р. З. Хасьминского ([1]). В этой работе найдены нижние границы для точности непараметрических оценок, а также построены асимптотически эффективные непараметрические оценки для линейных и некоторых нелинейных, но достаточно гладких функционалов от спектральной плотности.

Однако в работе ([1]) все основные результаты получены в случае, когда спектральная плотность равномерно отделена от нуля.

Цель настоящей заметки—сообщить о некоторых обобщениях результатов работы ([1]) на случай, когда спектральная плотность имеет нули.

2. Пусть x_t, $t=0, \pm 1, \ldots$—гауссовская стационарная последовательность со средним нуль $(Ex_t=0)$ и спектральной плотностью (с. п.) $f(\lambda)$, $\lambda\in[-\pi, \pi]$.

Предположим, что с. п. $f(\lambda)$ неизвестна, но известно, что она принадлежит множеству F спектральных плотностей, удовлетворяющему следующим условиям:

C_1 Равномерно по $f\in F$ $\sup \frac{1}{|I|^2}\int\limits_I f(\lambda)d\lambda \int\limits_I f^{-1}(\lambda)d\lambda<\infty$, где sup берется по отрезкам $I\subset[-\pi, \pi]$, $|I|$—длина отрезка I.

C_2. Равномерно по $f\in F$ $\sum\limits_{|k|>n} |a_k|^2=o(n^{-1/2})$ при $n\to\infty$;

C_3. Равномерно по $f\in F$ $\sum\limits_{|k|>n} |c_k|^2=o(n^{-1/2})$ при $n\to\infty$, где $\{a_k\}$ и $\{c_k\}$—коэффициенты Фурье функций $\ln f(\lambda)$ и $f(\lambda)$ соответственно.

Пусть $\varphi(\cdot)$ известный функционал, определенный на пространстве $L^2[-\pi, \pi]$. Мы хотим оценить значение функционала φ в точке f по n последовательным наблюдениям $x_1, \ldots, x_n$ над последовательностью x_t.

Предположим, что функционал φ дифференцируем в смысле Гато с производной $\mathrm{grad}\varphi(f)$, удовлетворяющей следующим условиям:

B_1. Равномерно по $f\in F$ $\|f\mathrm{grad}\varphi(f)\|<\infty$, где $\|\cdot\|$—норма в пространстве L^2.

B_2. Равномерно по $f\in F$ $\sum_{|k|>n} |b_k|^2 = o(n^{-1/2})$ при $n\to\infty$, где $\{b_k\}$— коэффициенты Фурье функции $\operatorname{grad}\varphi(f)(\lambda)$.

Обозначим через Φ_n класс всех оценок функционала $\varphi(f)$, построенных по наблюдениям $x_1, \ldots, x_n$, и пусть W—это класс всех симметричных, неубывающих функций потерь, таких, что $w(0)=0$, $w\in W$.

Следующая теорема является обобщением теоремы 1.1 работы (1) и дает минимаксную нижнюю границу для риска всевозможных оценок функционала $\varphi(g)$ в некоторой окрестности точки f.

Теорема 1. *Пусть множество F и функционал φ удовлетворяют условиям C_1—C_3, B_1 и B_2. Тогда для всех $w\in W$*

$$\Delta \overset{\text{def}}{=} \lim_{\delta\to 0} \varliminf_{n\to\infty} \inf_{\varphi_n\in\Phi_n} \sup_{\|g-f\|<\delta} E_g\{w(\sqrt{n}(\varphi_n-\varphi(g)))\} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} w(\sqrt{2\pi}\, \| f \operatorname{grad}\varphi(f)\| u) \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du \tag{1}$$

Доказательство теоремы 1 существенно опирается на нижеприводимую лемму 1.

Введем в рассмотрение параметрическое семейство спектральных плотностей $f_h(\lambda)$:

$$f_h(\lambda) = f(\lambda)(1 + h\psi(\lambda)), \tag{2}$$

где $\psi(\lambda)\in L^2$, а $h\in R^1$ такое, что $|h|$ достаточно мала.

Обозначим через $P_{n,h}$ распределение вектора $X=(x_1, \ldots, x_n)'$.

Лемма 1. *Пусть с. п. $f\in F$ и пусть функция $\psi(\lambda)$ из (2) удовлетворяет условию $\sum_{|k|>n} |r_k|^2 = o(n^{-1/2})$ при $n\to\infty$, где $\{r_k\}$—коэффициенты Фурье функции $r(\lambda) = \dfrac{\psi(\lambda)}{f(\lambda)}$. Тогда семейство распределений $\{P_{n,h}\}$ при $n\to\infty$ удовлетворяет условию локальной асимптотической нормальности в точке $h=0$ с информацией Фишера $J=\|\psi\|^2$.*

3. Теперь рассмотрим линейный функционал $T(f)$:

$$T(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) b(\lambda) d\lambda. \tag{3}$$

Естественной оценкой для функционала $T(f)$ является функция $\hat{T}_n$:

$$\hat{T}_n = \int_{-\pi}^{\pi} I_n(\lambda) b(\lambda) d\lambda, \tag{4}$$

где $I_n(\lambda) = \dfrac{1}{2\pi n} \left| \sum_{j=1}^{n} x_j e^{-i\lambda j} \right|^2$ —периодограмма последовательности x_t.

Обозначим через F_1 множество всех спектральных плотностей, удовлетворяющих условию C_3.

Предположим, что функция $b(\lambda)$ из (3) вещественна и удовлетворяет следующим условиям: равномерно по $f\in F_1$

$\tilde{B}_1$. $\|bf\|<\infty$;

$\tilde{B}_2$. $\sum\limits_{|k|>n}|b_k|^2=o(n^{-1/2})$ при $n\to\infty$, где $\{b_k\}$—коэффициенты Фурье функции $b(\lambda)$.

Пусть W_l класс функций потерь $w\in W$, удовлетворяющих дополнительному условию: при некоторых $c_1>0$ и $c_2>0$ $w(u)\leq \leq c_1\exp\{c_2|u|\}$.

Следующая теорема обобщает теорему 2.1 работы [1] на рассматриваемый здесь случай.

Теорема 2. *Пусть с. п. $f\in F_1$ и пусть функция $b(\lambda)$ удовлетворяет условиям $\tilde{B}_1$ и $\tilde{B}_2$.*

Тогда для всех $w\in W_l$ равномерно по f и T

$$\lim_{n\to\infty} E_f\{w(\sqrt{n}(\hat{T}_n-T(f))\}=Ew(\xi), \tag{5}$$

где ξ—нормальная случайная величина со средним нуль и дисперсией $\sigma^2=2\pi\|bf\|^2$.

Замечание 1. Из соотношений (1) и (5) следует, что если с. п. $f(\lambda)\in F$, то оценка $\hat{T}_n$ является асимптотически эффективной оценкой для линейного функционала $T(f)$ в классе $\Phi_n(T)$.

Доказательство теоремы 2 легко следует из нижеприведеных лемм.

Лемма 2. *В условиях теоремы 2 равномерно по f и T*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/2}|E_f(\hat{T}_n)-T(f)|=0$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} nE_f(\hat{T}_n-T(f))^2=2\pi\|bf\|^2$.

Лемма 3. *В условиях теоремы 2 равномерно по f, T и $u\in R^1$*

$$\lim_{n\to\infty}|P\{\sqrt{n}(\hat{T}_n-T(f))<u\}-P(\xi<u)|=0,$$

где ξ—нормальная случайная величина со средним нуль и дисперсией $\sigma^2=2\pi\|bf\|^2$.

Институт математики
Академия наук Армянской ССР

Մ. Ս. ԳԻՆՈՎՅԱՆ

Զրոներ ունեցող սպեկտրալ խտությունից ֆունկցիոնալների գնահատման մասին

Դիցուք x_t, $t=0, \pm 1, \ldots$ զրոյական միջինով և $f(\lambda)$, $\lambda\in[-\pi, \pi]$, սպեկտրալ խտությամբ գաուսյան ստացիոնար հաջորդականություն է, $X_n=(x_1, \ldots, x_n)$-ը n-չափանի վերցվածք է այդ հաջորդականությունից և դիցուք $\varphi(f)$-ն ֆունկցիոնալ է որոշված L^2 տարածության վրա։ Հոդվածում դիտարկվում է $\varphi(f)$ ֆունկցիոնալի ոչպարամետրական գնահատման խնդիրը

X_n վերջվածքի միջոցով, այն դեպի համար, երբ $f(\lambda)$ ֆունկցիան ունի զրոներ։ Ստացված է բանաձև ոչպարամետրական գնահատականի ճշգրտության ստորին եզրի համար։ Բերված են ասիմպտոտիկ էֆեկտիվ գնահատականներ այն դեպքի համար, երբ $\varphi(f)$ ֆունկցիոնալը գծային է։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *R. Z. Has'minskii, I. A. Ibragimov,* Probability Theory and Rel. Fields, v. 73, №3 (1986). [2] *И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский,* Асимптотическая теория оценивания, Наука, М., 1979 [3] *Ю. А. Кошевник, Б. Я. Левит,* Теория вероятн. и ее примен., т. 21, вып. 4 (1976) [4] *М. С. Гиновян,* Зап. научн. семинаров ЛОМИ, т. 136 (1984).