ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXIII 1986 4

УДК 517.984

МАТЕМАТИКА

В. А. Явряи

О спектральном разложении однопарного интегрального оператора

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. У. Аракеляном 6/IX 1985)

1. В пространстве $\mathscr{L}^2(0,\infty)$ рассмотрим оператор L, задаваемый формулой $Ly=-y''+q(x)y$, где $q(x)$ вещественная локально суммируемая функция, и определенный на финитных функциях $y(x)$, удовлетворяющих в нуле условию $y'(0)-hy(0)=0$, $\operatorname{Im}h=0$.

Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ решения уравнения $-y''+q(x)y=0$ и $\varphi'(0)-h\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)\psi(0)-\varphi(0)\psi'(0)=1$. Тогда обратимый оператор $A=L^{-1}$ есть интегральный оператор с ядром

$$K(x,s)=\begin{cases}\varphi(x)\psi(s), & x\leqslant s\\ \varphi(s)\psi(x), & x\geqslant s\end{cases}, \tag{1}$$

который определен на тех финитных функциях $f(x)$, которые удовлетворяют условию

$$\int_0^\infty f(x)\varphi(x)dx=0. \tag{2}$$

В пространстве $\mathscr{L}^2(0,\infty)$ мы будем изучать оператор A в предположении, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ произвольные локально квадратично интегрируемые вещественные функции, $\varphi(x)$, $\psi(x)\in L^2(0,a)$ для любого a и

$$\int_0^\infty(\varphi^2(x)+\psi^2(x))dx=\infty. \tag{3}$$

Для простоты предполагаем также, что $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на множестве положительной меры не обращаются в нуль одновременно.

Условие (3) соответствует случаю точки Вейля в теории операторов Штурма—Лиувилля. В настоящей работе для оператора A строится теория, аналогичная спектральной теории операторов Штурма—Лиувилля на $L^2(0,\infty)$. В случае конечного интервала интегральные операторы с ядрами вида (1) рассматривались в монографии Ф. Р. Гантмахера и М. Г. Крейна ([1]), где они назывались однопарными интегральными операторами.

Оператор A симметричен. Если $\varphi(x)\in\mathscr{L}^2(0,\infty)$, то его область определения неплотна и возможен случай, когда он не имеет замыкания.

Следуя ([2]), интервал (α, β) будем называть исключительным, если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ линейно-зависимы в этом интервале. Пусть $\{(\alpha_k, \beta_k)\}$ множество всех максимальных исключительных интервалов. Без ограничения общности будем считать, что $\varphi(x) \not\equiv 0$ в интервале вида $(0, \beta)$ и что интервал вида $(\alpha, +\infty)$ не есть исключительный (в противном случае надо рассматривать пространства $\mathscr{L}^2(\beta, \infty)$ и $\mathscr{L}^2(0, \alpha)$).

Теорема 1. *Ортогональное дополнение $K(A)$ области значений оператора A состоит из функций $g(x)$, удовлетворяющих условиям:*

1) $g(x)=0$ *почти всюду на* $F=(0, \infty) \setminus \bigcup\limits_k (\alpha_k, \beta_k)$,

$$2) \quad \int\limits_{\alpha_k}^{\beta_k} g(x)\varphi(x)dx = \int\limits_{\alpha_k}^{\beta_k} g(x)\psi(x)dx = 0.$$

Очевидно, что если $g(x)$ финитная функция и $g(x) \in K(A)$, то $g(x)$ принадлежит области определения $\mathscr{D}(A)$ оператора A и $Ag=0$.

Следствие 1. *Для того чтобы существовал обратный оператор A^{-1}, необходимо и достаточно, чтобы отсутствовали исключительные интервалы.*

Следствие 2. *Замыкание H_0 области значений оператора A состоит из функций $g(x)$, произвольных на F и*

$$y(x)=\begin{cases} c_k\varphi(x), & x \in (\alpha_k, \beta_k), \text{ если } \varphi(x) \not\equiv 0 \text{ на } (\alpha_k, \beta_k), \\ c_k\psi(x), & x \in (\alpha_k, \beta_k), \text{ если } \varphi(x) \equiv 0 \text{ на } (\alpha_k, \beta_k). \end{cases}$$

Очевидно, что подпространство H_0 приводит оператор A. Обозначим через A_0 часть оператора A в подпространстве H_0: $A_0 f = Af$, $f \in \mathscr{D}(A) \cap H_0$. Область определения $\mathscr{D}(A_0)$ оператора A_0 плотна в H_0.

Теорема 2. *Замыкание $\overline{A_0^{-1}}$ оператора A_0^{-1} есть самосопряженный оператор.*

Отметим, что $g \in \mathscr{D}((A_0^{-1})^*) = \mathscr{D}(\overline{A_0^{-1}})$ означает, что существует такая постоянная c и функция $g^*(x) \in H_0$, что $g(x) = c\varphi(x) - \int\limits_0^x V(x, s)g^*(s)ds$, где $V(x, s) = \varphi(x)\psi(s) - \varphi(s)\psi(x)$. При этом очевидно, что c и $g^*(x)$ определяются единственным образом и $(A^{-1})^* g = g^*$.

Пусть $\varphi(x, \lambda)$ есть решение интегрального уравнения Вольтерра $\varphi(x, \lambda) + \lambda \int\limits_0^x V(x, s)\varphi(s, \lambda)ds = \varphi(x)$. Обозначим через $\mathscr{L}_0$ множество финитных функций из H_0. Можно проверить, что уравнение $A_0^{-1} f - \lambda f = g \in \mathscr{L}_0$ $(\mathrm{Im}\lambda = 0)$ имеет решение в том и только том случае, когда $\Phi(g, \lambda) = 0$, где $\Phi(g, \lambda) = \int\limits_0^\infty g(x)\varphi(x, \lambda)dx$. Таким образом, $\Phi(g, \lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ есть направляющий функционал для оператора A_0^{-1}; применяя метод направляющего функционала М. Г. Крейна, с учетом теоремы 2 получаем следующее утверждение:

Теорема 3. *Существует единственная неубывающая функция $\sigma(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ такая, что отображение*

$$U: g \to \Phi(g, \lambda), \quad g \in \mathcal{L}_0$$

есть изометрия из $\mathcal{L}_0$ *в* $\mathcal{L}^2_\sigma$. *Более того, продолжение* U *по непрерывности отображает* H_0 *на все пространство* $\mathcal{L}^2_\sigma$. *При этом оператор* A_0 *переходит в оператор умножения на* $1/\lambda$ *в пространстве* $\mathcal{L}^2_\sigma$.

Теорема 3 в случае отсутствия исключительных интервалов и без указания единственности спектральной функции $\sigma(\lambda)$ другим путем установлена де Бранжем (см. ([2]), с. 49).

Если $f(x)$ финитная функция и $f(x) \in K(A)$, то $\Phi(f, \lambda)=0$ для любого $\lambda \in (-\infty, \infty)$. Обозначим через P оператор ортогонального проектирования на подпространство $K(A)$. Легко видеть, что если $f(x)$ финитная функция, то $(Pf)(x)$ тоже будет финитной и $\Phi(Pf, \lambda)=0$. Следовательно, для финитных $f(x)$ имеем

$$\int_0^\infty |f(x)-(Pf)(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(f, \lambda)|^2 d\sigma(\lambda).$$

2. Теперь мы хотим построить аналоги кругов Вейля для однопарного интегрального оператора.

В пространстве $\mathcal{L}^2(0, b)$ рассмотрим интегральные операторы $A(b, \tau)$ с ядрами

$$K(x, s, b, \tau)=\begin{cases} \varphi(x)(\psi(s)+\tau\varphi(s)), & x \leqslant s \\ \varphi(s)(\psi(x)+\tau\varphi(x)), & x \geqslant s \end{cases},$$

где τ — вещественный параметр, $-\infty<\tau<\infty$.

Эти операторы являются расширениями части оператора A, рассмотренного в подпространстве $\mathcal{L}^2(0, b)$.

Пусть $A_\lambda(b, \tau)$ Фредгольмова резольвента оператора $A(b, \tau)$: $(I-\lambda A(b, \tau))^{-1}=I+\lambda A_\lambda(b, \tau)$. Тогда можно показать, что $A_\lambda(b, \tau)$ интегральный оператор с однопарным ядром:

$$A_\lambda(x, s, b, \tau)=\begin{cases} \varphi(x, \lambda)(\psi(s, \lambda)+m(\lambda, b, \tau)\varphi(s, \lambda)), & x \leqslant s \\ \varphi(s, \lambda)(\psi(x, \lambda)+m(\lambda, b, \tau)\varphi(x, \lambda)), & x \geqslant s \end{cases} \quad (\operatorname{Im}\lambda>0),$$

где
$$m(\lambda, b, \tau)=(E_0\tau+E_1)(D_0\tau+D_1)^{-1}, \tag{4}$$

$$E_0=1+\lambda\int_0^b \psi(x, \lambda)\varphi(x)dx, \qquad E_1=\lambda\int_0^b \psi(x, \lambda)\psi(x)dx,$$

$$D_0=-\lambda\int_0^b \varphi(x, \lambda)\varphi(x)dx, \qquad D_1=1-\lambda\int_0^b \varphi(x, \lambda)\psi(x)dx,$$

а $\psi(x, \lambda)$ есть решение интегрального уравнения

$$\psi(x, \lambda)+\lambda\int_0^x V(x, s)\psi(s, \lambda)ds=\psi(x).$$

Дробно-линейное преобразование (4) переводит вещественную ось

$\operatorname{Im}\tau=0$ на некоторую окружность $C_b(\lambda)$. Можно показать, что эту окружность можно задавать также уравнением

$$\int_0^\infty |\psi(x,\lambda)+m\varphi(x,\lambda)|^2dx=\frac{\operatorname{Im} m}{\operatorname{Im}\lambda} \qquad (\operatorname{Im}\lambda>0). \tag{5}$$

Круг, ограниченный окружностью $C_b(\lambda)$, обозначим через $K_b(\lambda)$. Очевидно, что $K_b(\lambda)$ определяется неравенством

$$\int_0^\infty |\psi(x,\lambda)+m\varphi(x,\lambda)|^2dx\leqslant\frac{\operatorname{Im} m}{\operatorname{Im}\lambda}. \tag{6}$$

Отсюда следует, что при любом $b>0$ круги $K_b(\lambda)$ $(\operatorname{Im}\gamma>0)$ лежат в верхней полуплоскост. Ясно также, что круги $K_b(\lambda)$ включены друг в друга, $K_{b'}(\lambda)\subset K_b(\lambda)$ при $b<b'$. Можно показать, что радиус круга $K_b(\lambda)$ задается формулой

$$r_b(\lambda)=1/2\operatorname{Im}\lambda\int_0^b |\varphi(x,\lambda)|^2dx \qquad (\operatorname{Im}\lambda>0). \tag{7}$$

Уравнение окружности $C_b(\lambda)$ (так называемая окружность Вейля) в форме (4) в случае оператора Штурма—Лиувилля установлено М. Г. Крейном ([3]), а (5), (6) и (7) известные формулы Вейля.

Так как $m(\lambda, b, \tau)$ непрерывно зависит от b, $b\geqslant0$ и $m(\lambda, 0, \tau)=\tau$, то легко видеть, что $m(\lambda, b, \tau)$ при любом $b>0$, $\operatorname{Im}\lambda>0$ отображает верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\tau\geqslant0$ в круг $K_b(\lambda)$.

Теорема 4. *Существует функция* $\Omega(\lambda)$, *притом единственная, такая, что*

$$\psi(x,\lambda)+\Omega(\lambda)\varphi(x,\lambda)\in\mathscr{L}^2(0,\infty) \qquad (\operatorname{Im}\lambda>0).$$

Ядро $R(x, s, \lambda)$ *резольвенты оператора* A_0^{-1} *имеет вид:*

$$R(x,s,\lambda)=\begin{cases}\varphi(x,\lambda)(\psi(s,\lambda)+\Omega(\lambda)\varphi(s,\lambda)), & x\leqslant s\\ \varphi(s,\lambda)(\psi(x,\lambda)+\Omega(\lambda)\varphi(x,\lambda)), & x\geqslant s\end{cases}. \tag{8}$$

Правая часть (8) есть также ядро замыкания фредгольмовой резольвенты оператора A (хотя замыкание A не всегда существует). Так как $r_b(\lambda)\to0$ при $b\to+\infty$, то $\Omega(\lambda)=\lim\limits_{b\to\infty} m(\lambda, b, \tau)$ и, следовательно, $\Omega(\lambda)$ аналитическая в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda>0$ функция и отображает верхнюю полуплоскость на свою часть. Из (8) следует, что спектральная функция $\sigma(\lambda)$ оператора A дает представление $\Omega(\lambda)=\alpha+$ $+\beta\lambda+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{t-\lambda}-\frac{1}{1+t^2}\right)d\sigma(t)$, где $\beta\geqslant0$, α—вещественно.

Отметим, что теорему 3 можно вывести также из теоремы 4. Теперь приведем оценку спектральной функции оператора A, которая аналогична случаю оператора Штурма—Лиувилля.

Теорема 5. *Пусть функции* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *непрерывны на некотором отрезке* $[0, b]$, $\varphi(0)\neq0$ *и отношение* $\psi(x)/\varphi(x)$ *убывающая* *функция на* $[0, b]$. *Тогда спектральная функция* $\sigma(\lambda)$ *оператора* A *удовлетворяет неравенству*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{1+|\lambda|} < +\infty.$$

Для доказательства этой теоремы мы сначала показываем, что оператор $A(b, \tau)$ при некотором τ положителен, а функция $\varphi(x, \lambda)$ при любом $x < b$ является целой функцией λ не более половинного порядка. Отсюда получаем оценку спектральной функции оператора $A(b, \tau)$, а с помощью формулы (6) эта же оценка переносится на функцию $\sigma(\lambda)$.

Армянский сельскохозяйственный институт

Վ. Ա. ՅԱՎՐՅԱՆ

Միազույգ ինտեգրալ օպերատորի սպեկտրալ վերլուծության մասին

Աշխատանքում դիտարկվում է (1) բանաձևով սահմանված A *օպերատորը, որը որոշված է (2) պայմանին բավարարող և* $\mathcal{L}^2(0, \infty)$ *տարածությանը պատկանող ֆունկցիաների վրա։*

Ապացուցված է, որ A *օպերատորը ինքնահամալուծ է (թեորեմ 2) և ստացված է նրա սպեկտրալ վերլուծությունը (թեորեմ 3)։ Ստացված է սպեկտրալ ֆունկցիայի գնահատականը (թեորեմ 5), որը Շտուրմ-Լիուվիլի օպերատորի դեպքի անալոգն է։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ф. Р. Гантмахер, М. Г. Крейн*, Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания систем, ГИТТЛ, М—Л. 1950. [2] *De Branges Louis*, Trans. Amer. Math. Soc., v. 105, p. 43—83 (1962). [3] *М. Г. Крейн*, Изв. АН СССР. Сер. мат., т. 16, с. 293—324 (1952).