ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXIII 1986 4

УДК 519.853

МАТЕМАТИКА

Э. В. Карслян, Ф. П. Григорян, В. Г. Александрян

Одна задача нелинейного программирования в комплексной плоскости

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 6/IX 1985)

В приложениях, в частности при исследовании многомерных систем автоматического управления, возникает следующая задача. Дана невырожденная комплексная матрица $C=A+iB$, где $A=(a_{kj})_{n\times n}$ и $B=(b_{kj})_{n\times n}$ соответственно действительная и мнимая части матрицы $C=(c_{kj})_{n\times n}$. Требуется найти матрицу $Z=X+iY$, $Z=(z_{kj})_{n\times n}$, $X=(x_{kj})_{n\times n}$, $Y=(y_{kj})_{n\times n}$, обладающую наименьшей нормой, такую, чтобы $\det(Z-C)=0$.

Здесь под нормой понимается число

$$\|Z\|=[\sum_{k,j}(x_{kj}^2+y_{kj}^2)]^{1/2}=[\mathrm{tr}(ZZ^*)]^{1/2} \tag{1}$$

(где tr означает след матрицы).

В работе [1] решена аналогичная задача для вещественных матриц, связанная с задачей отыскания радиуса устойчивости произвольного конечномерного базиса в метрике чебышевского типа.

Решение задачи. Сформулированная задача записывается в виде обычной задачи на условный минимум

$$\min\|Z\|, \quad \det(Z-C)=0. \tag{2}$$

Пусть $\det(Z-C)=U+iV$, $U=\mathrm{Re}\det|Z-C|$, $V=\mathrm{Im}\det|Z-C|$. Тогда (2) приводится к следующей задаче:

$$\min\|Z\|, \quad U=0, \quad V=0. \tag{3}$$

Составим функцию Лагранжа: $\Lambda=\frac{1}{2}\|Z\|^2-\mu_1 U-\mu_2 V$, где μ_1, μ_2—действительные числа. Приравнивая частные производные Λ по x_{kj} и по y_{kj} $(k, j=1, \ldots, n)$ к нулю, получим

$$\begin{cases} x_{kj}=\mu_1\dfrac{\partial u}{\partial x_{kj}}+\mu_2\dfrac{\partial v}{\partial x_{kj}}, \\ y_{kj}=\mu_1\dfrac{\partial u}{\partial y_{kj}}+\mu_2\dfrac{\partial v}{\partial y_{kj}}. \\ u=0,\ v=0 \end{cases} \tag{4}$$

Для решения системы (4) понадобится известная вспомогательная формула

$$\sum_{j=1}^{n} m_{kj}M_{\alpha j}=\delta_{k\alpha}\det M, \tag{5}$$

где $M_{\alpha j}$—алгебраическое дополнение $m_{\alpha j}$ в матрице $M=(m_{\alpha j})$, а $\delta_{k\alpha}$—символ Кронекера. Применяя формулу (5) к определителю матрицы $(Z-C)$, получим

$$\sum_{j=1}^{n} (z_{kj}-c_{kj})M_{\alpha j}=\delta_{k\alpha}\det(Z-C).$$

Пусть $M_{\alpha j}=U_{\alpha j}+iV_{\alpha j}$. Тогда последнее соотношение принимает следующий вид:

$$\sum_{j=1}^{n} [(x_{kj}-a_{kj})+i(y_{kj}-b_{kj})](U_{\alpha j}+iv_{\alpha j})=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\{[(x_{kj}-a_{kj})U_{\alpha j}-(y_{kj}-b_{kj})V_{\alpha j}]+$$

$$+i[(y_{kj}-b_{kj})U_{\alpha j}+(x_{kj}-a_{kj})V_{\alpha j}]\}=\delta_{k\alpha}(U+iV).$$

Разделяя действительную и мнимую части в левой и правой частях полученного соотношения, имеем

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{n} [(x_{kj}-a_{kj})U_{\alpha j}-(y_{kj}-b_{kj})V_{\alpha j}]=\delta_{k\alpha}U,\\ \sum_{j=1}^{n} [(y_{kj}-b_{kj})U_{\alpha j}+(x_{kj}-a_{kj})V_{\alpha j}]=\delta_{k\alpha}V.\end{gathered} \tag{6}$$

Дифференцируя соотношение (6) при $k=\alpha$, получим

$$\begin{gathered}U_{\alpha j}=\frac{\partial U}{\partial x_{\alpha j}}=\frac{\partial V}{\partial y_{\alpha j}},\\ V_{\alpha j}=\frac{\partial V}{\partial x_{\alpha j}}=-\frac{\partial U}{\partial y_{\alpha j}}.\end{gathered} \tag{7}$$

Пользуясь (7) и (4), из (6) имеем

$$\sum_{j=1}^{n}\left[(x_{kj}-a_{kj})\frac{\partial U}{\partial x_{\alpha j}}+(y_{kj}-b_{kj})\frac{\partial U}{\partial y_{\alpha j}}\right]=0; \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left[(x_{kj}-a_{kj})\frac{\partial V}{\partial x_{\alpha j}}+(y_{kj}-b_{kj})\frac{\partial V}{\partial y_{\alpha j}}\right]=0. \tag{9}$$

Умножая (8) на μ_1, а (9) на μ_2 и суммируя полученные соотношения, с учетом (4) получим

$$\sum_{j=1}^{n} [(x_{kj}-a_{kj})x_{\alpha j}+(y_{kj}-b_{kj})y_{\alpha j}]=0.$$

Последнее соотношение эквивалентно следующему:

$$(X-A)X^T+(Y-B)Y^T=0, \tag{10}$$

где T означает транспонированную матрицу. Теперь, умножая (8) на μ_2, а (9) на $(-\mu_1)$, суммируя полученные соотношения и учитывая (4) и (7), получим

$$\sum_{j=1}^{n} (x_{kj}-a_{kj})y_{*j}-(y_{kj}-b_{kj})x_{*j}=0.$$

Представив последнее уравнение в матричной форме, имеем

$$-(X-A)Y^T+(Y-B)X^T=0. \qquad (11)$$

Легко видеть, что левые части соотношений (10) и (11) являются соответственно действительной и мнимой частями матрицы $(Z-C)\overline{Z}_T$ (здесь «—» означает комплексно-сопряженную матрицу). Отсюда следует, что

$$(Z-C)Z^*=0, \qquad (12)$$

где $Z^*=\overline{Z}^T$.

Сделаем замену переменной в уравнении (12):

$$C\eta=Z, \quad Z^*=\eta^*C^*. \qquad (13)$$

Запишем (12) в следующем виде: $ZZ^*=CZ^*$.
Отсюда, используя (13), получим $C\eta\eta^*C^*=C\eta^*C^*$, т. е.

$$\eta\eta^*=\eta^*, \qquad (14)$$

откуда имеем $\eta=(\eta^*)^*=\eta\eta^*$.

Таким образом

$$\eta=\eta^*. \qquad (15)$$

Из (14) и (15) следует, что η и $\eta\eta^*$—эрмитовы матрицы. Очевидно, что η и $\eta\eta^*$ приводятся к диагональному виду одной и той же унитарной матрицей S, $S^*=S^{-1}$.

Пусть теперь

$$W=S^*\eta S, \quad \eta=SWS^*, \qquad (16)$$

где W—диагональная матрица.
Имеем $W=S^*\eta S=S^*\eta\eta^*S=S^*\eta^2S$, $\quad W^2=S^*\eta SS^*\eta S=S^*\eta^2S$.
Таким образом $W=W^2$, т. е.

$$W_{jj}=W_{jj}^2. \qquad (17)$$

Из (13) и (16) следует $Z=CSWS^*$, $Z^*=SW^*S^*C^*$ и

$$ZZ^*=CSWS^*C^*. \qquad (18)$$

Согласно (1) и (18) имеем

$$\|Z\|=[\mathrm{tr}(CSWS^*C^*)]^{1/2}=\{\mathrm{tr}[CSW(CS)^*]\}^{1/2}. \qquad (19)$$

Пусть $CS=(d_{jk})$, $(CS)^*=(\overline{d}_{kj})$, $W=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Тогда (19) принимает вид

$$\|Z\|^2=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{r=1}^{n}|d_{rj}|^2\right)\lambda_j. \qquad (20)$$

Из (17) имеем $W_{jj}\in\{0; 1\}$. Предположим, что из диагональных элементов матрицы W отличными от нуля являются элементы λ_{j_1}, $\lambda_{j_2}, \ldots, \lambda_{j_m}$.

Тогда из (20) получаем, что $\|Z\|^2=\sum_{l=1}^{m}\sum_{r=1}^{n}|d_{rj_l}|^2$. Отсюда следует, что какова бы ни была эрмитова матрица η, величину нормы $\|Z\|$ минимизирует такая матрица W, которая имеет лишь один отличный от нуля элемент. Предположим, что этим элементом является W_{kk}. Тогда последнее соотношение принимает следующий вид:

$$\|Z\|^2=\sum_{r=1}^{n}|d_{rk}|^2. \tag{21}$$

Обозначим

$$D_k=(d_{1k},\ d_{2k},\ \ldots,\ d_{nk})^T,\quad S=(\sigma_{rj})=(\sigma^1,\ \sigma^2,\ \ldots,\ \sigma^n);\ \sigma_{rj}=\sigma'_{rj}+i\sigma''_{rj};$$

$$\sigma^j=(\sigma_{1j},\ \sigma_{2j},\ \ldots,\ \sigma_{nj})^T=(\sigma'_{1j},\ \sigma'_{2j},\ \ldots,\ \sigma'_{nj})^T+i(\sigma''_{1j},\ \sigma''_{2j},\ \ldots,\ \sigma''_{nj})^T=\beta^j+i\gamma^j.$$

Тогда легко видеть, что $D_k=C\sigma^k$. Следовательно,

$$\|Z\|^2=\|D_k\|^2=\|C\sigma^k\|^2=(C\sigma^k)^*(C\sigma^k). \tag{22}$$

Таким образом, $\|Z\|=(\sigma^k)^*C^*C\sigma^k$. Преобразуем норму (21) к виду, который понадобится нам в дальнейшем:

$$\|Z\|^2=\sum_{r=1}^{n}|d_{rk}|^2=\sum_{\alpha=1}^{n}\left|\sum_{r=1}^{n}C_{\alpha r}\sigma_{rk}\right|^2=$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{n}\left\{\left[\sum_{r=1}^{n}(a_{\alpha r}\sigma'_{rk}-b_{\alpha r}\sigma''_{rk})\right]^2+\left[\sum_{r=1}^{n}(a_{\alpha r}\sigma''_{rk}+b_{\alpha r}\sigma'_{rk})\right]^2\right\} \tag{23}$$

Таким образом, задача вновь свелась к задаче на условный экстремум:

$$\min\sum_{\alpha=1}^{n}\left\{\left[\sum_{r=1}^{n}(a_{\alpha r}\sigma'_{rk}-b_{\alpha r}\sigma''_{rk})\right]^2+\left[\sum_{r=1}^{n}(a_{\alpha r}\sigma''_{rk}+b_{\alpha r}\sigma'_{rk})\right]^2\right\},$$

$$\sum_{r=1}^{n}(\sigma'^2_{rk}+\sigma''^2_{rk})=1.$$

Составим функцию Лагранжа

$$\Lambda_1=\sum_{\alpha=1}^{n}\left\{\left[\sum_{r=1}^{n}(a_{\alpha r}\sigma'_{rk}-b_{\alpha r}\sigma''_{rk})\right]^2+\left[\sum_{r=1}^{n}(a_{\alpha r}\sigma''_{rk}+b_{\alpha r}\sigma'_{rk})\right]^2\right\}-$$

$$-\nu\left[\sum_{r=1}^{n}(\sigma'^2_{rk}+\sigma''^2_{rk})-1\right].$$

Здесь ν—действительное число.

Дифференцируя Λ_1 и приравнивая к нулю, имеем

$$\frac{\partial\Lambda_1}{\partial\sigma'_{mk}}=2\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}[a_{\alpha m}(a_{\alpha r}\sigma'_{rk}-b_{\alpha r}\sigma''_{rk})+b_{\alpha m}(a_{\alpha r}\sigma''_{rk}+b_{\alpha r}\sigma'_{rk})]-2\nu\sigma'_{mk}=0;$$

$$\frac{\partial\Lambda_1}{\partial\sigma''_{mk}}=2\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}[-b_{\alpha m}(a_{\alpha r}\sigma'_{rk}-b_{\alpha r}\sigma''_{rk})+a_{\alpha m}(a_{\alpha r}\sigma''_{rk}+b_{\alpha r}\sigma'_{rk})]-2\nu\sigma''_{mk}=0.$$

Представляя полученные соотношения в матричной форме, имеем

$$(A^TA+B^TB)\beta^k+(B^TA-A^TB)\gamma^k=\nu\beta^k; \tag{24}$$

$$(A^TB-B^TA)\beta^k+(A^TA+B^TB)\gamma^k=\nu\gamma^k. \tag{25}$$

Из (24) и (25) вытекает уравнение

$$(C^*C-\nu E)\sigma^k=0, \tag{26}$$

где E—единичная матрица.

Итак, решение задачи достигается, если σ^k—нормированный собственный вектор, а ν—соответствующее собственное значение матрицы C^*C.

Теперь определим минимальное значение $\|Z\|$. Из (26) имеем $C^*C\sigma^k=\nu\sigma^k$ или $(\sigma^k)^*C^*C\sigma^k=\nu$. Следовательно, в силу (22) получаем $\|Z\|=\sqrt{\nu}$. Таким образом, $Z=CSWS^*$, где столбцы S—собственные векторы матрицы C^*C, соответствующие ее собственным значениям $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$; W—диагональная матрица, имеющая всего один ненулевой элемент w_{kk}, где k определяется из условия $\nu_k=\min\limits_j \nu_j$ и $\min\|Z\|=\sqrt{\nu_k}$.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Է. Վ. ԿԱՐՍԼՅԱՆ, Ձ. Պ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ, Վ. Դ. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՅԱՆ

Կոմպլեքսային հարթության մեջ ոչ գծային ծրագրավորման մեկ խնդիր

Կիրառման խնդիրներում, մասնավորապես բազմաչափ ավտոմատ կառավարման համակարգերի հետազոտման ժամանակ, ծագում է հետևյալ խնդիրը։ Տրված է չվերասերվող կոմպլեքսային մատրիցա $C=A+iB$, *որտեղ* A-*ն և* B-*ն համապատասխանաբար* C *մատրիցայի իրական և կեղծ մասերն են։*

Անհրաժեշտ է գտնել Z *մատրիցան, որը* $\det(Z-C)=0$ *պայմանի դեպքում ունի ամենափոքր նորմա։*

Նման խնդիր լուծված է ([1]*) աշխատանքում իրական մատրիցաների համար, կապված չեբիշևյան տիպի մետրիկայում կամայական վերջնաչափ բազիսի կայունության շառավղի փնտրման խնդրի հետ։*

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Е. В. Гаврушенко, В. Н. Прупис*, Ж.В.М. и матфиз., т. 21, № 5, 1312—1315 (1981). [2] *Р. Ганнинг, Х. Росси*, Аналитические функции многих комплексных переменных, М., Мир, 1969. [3] *П. Ланкастер*, Теория матриц, М., Наука, 1978.