ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXIII 1986 4

УДК 517.547

МАТЕМАТИКА

Л. А. Галстян, В. К. Дубовой

О вырожденной проблеме Шура

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 17/VI 1985)

В работах ([1–4]) решение матричной проблемы Шура привело к построению важных объектов j-теории: элементарного кратного множителя с одной стороны и конечного произведения двучленных множителей с другой. При этом в случае невырождения информационного блока основного матричного неравенства их совпадение являлось следствием их полной адекватности данной задаче.

Ситуация усложняется при рассмотрении вырожденных задач Шура. Здесь однозначности построения решающего задачу элементарного кратного множителя нет ([4]). Нет однозначности также при построении двучленных множителей в процессе пошагового решения задачи.

В настоящей заметке устанавливается взаимосвязь между такими задачами и конечными произведениями двучленных множителей неполного ранга. Выясняется также структура элементарных кратных множителей, правильному разложению которых на двучленные множители соответствует пошаговый процесс.

Все необходимые понятия и обозначения содержатся в ([3–4]).

1°. Пошаговое решение вырожденной задачи Шура

$$\theta(\zeta)=c_0+c_1\zeta+\ldots+c_n\zeta^n+\ldots,\quad \ker(I-C_nC_n^*)\neq\{0\},$$

приводит к построению конечного произведения двучленных множителей неполного ранга

$$B_n(\zeta)=b_0(\zeta)\cdot b_1(\zeta)\cdot\ldots\cdot b_n(\zeta),$$
$$b_k(\zeta)=I+(1-\zeta)\begin{bmatrix} I \\ c_0^{(k)*}\end{bmatrix}(P_k-\tilde{c}_0^{(k)}\tilde{c}_0^{(k)*})^{[-1]}[I,\ c_0^{(k)}]\tilde{j}, \tag{1}$$

в котором P_k—ортопроекторы на дополнения к ядрам $N_0^{(k)}=\ker(I-c_0^{(k)}c_0^{(k)*})$, причем

$$N_0^{(0)}=\ker(I-c_0c_0^*)\subseteq N_0^{(1)}\subset\ldots\subset N_0^{(n)}\subset E_p,$$

$$\tilde{c}_0^{(k)}=P_kc_0^{(k)},\quad \tilde{j}=\begin{bmatrix}-I_p & 0\\ 0 & I_q\end{bmatrix},$$

а матрицы $c_0^{(k)}$—известные параметры Шура.

Одновременно строятся унитарные матрицы $U_0, U_1, \ldots, U_n$, действующие в подпространствах $M_0^{(k)}=\ker(I-c_0^{(k)*}c_0^{(k)})\subset E_q$ по правилу

$$U_k|_{M_0^{(k)}}=c_0^{(k)}|_{M_0^{(k)}},\quad U_k=\begin{bmatrix} u_0 & & & \\ & u_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_k\end{bmatrix},\quad k=0, 1, \ldots, n,$$

после чего общее решение поставленной задачи записывается в виде дробно-линейного преобразования $\theta(\zeta)=B_n(\zeta)\{\omega(\zeta)\}$, с параметром $\omega(\zeta)$, имеющим структуру $\omega(\zeta)=\begin{vmatrix} U_n & 0 \\ 0 & \bar{\omega}(\zeta)\end{vmatrix}$, где $\bar{\omega}(\zeta)$—произвольная голоморфная сжимающая матрица-функция подходящей размерности.

Важно отметить, что здесь выбор дополнений к ядрам $N_0^{(k)}$, на которые проектируют ортопроекторы P_k, совершенно произволен. При их изменении результат дробно-линейного преобразования соответствующего параметра не меняется.

Последнее, в частности, можно объяснить тем, что задание параметров Шура $c_0^{(0)}=c_0$, $c_0^{(1)}, \ldots, c_0^{(n)}$, для которых ядра $N_0^{(k)}$ монотонно „расширяются", однозначно определяет задачу.

Добавим, что при ортогональных разложениях пространств E_p и E_q:

$$E_p=N_0^{(k)}\oplus N_1^{(k)},\quad E_q=M_0^{(k)}\oplus M_1^{(k)},\quad k=0, 1, \ldots, n,$$

$$N_0^{(k)}=N_0^{(0)}\oplus(N_0^{(1)}\ominus N_0^{(0)})\oplus\ldots\oplus(N_0^{(k)}\ominus N_0^{(k-1)}),$$

$$M_0^{(k)}=M_0^{(0)}\oplus(M_0^{(1)}\ominus M_0^{(0)})\oplus\ldots\oplus(M_0^{(k)}\ominus M_0^{(k-1)})$$

параметры $c_0^{(k)}$ имеют блочно-диагональный вид

$$c_0^{(k)}=\begin{vmatrix} U_k & 0 \\ 0 & \bar{c}_0^{(k)}\end{vmatrix},\quad k=0, 1, \ldots, n,$$

где $U_0, U_1, \ldots, U_n$—те же, что и выше, а $\bar{c}_0^{(0)}, \bar{c}_0^{(1)}, \ldots, \bar{c}_0^{(n)}$—строгие сжатия.

Справедливо также и обратное утверждение:

Теорема. *Пусть*

$$B_n(\zeta)=\overrightarrow{\prod}_{k=0}^{n}b_k(\zeta),$$
$$b_k(\zeta)=I+(1-\zeta)\begin{bmatrix} I \\ c^{(k)*}\end{bmatrix}(P_k-c^{(k)}c^{(k)*})^{[-1]}[I, c^{(k)}]\tilde{j} \tag{2}$$

—произвольное конечное произведение параметризованных двучленных множителей неполного ранга.

Тогда, если выполняются неравенства $P_0\geqslant P_1\geqslant\ldots\geqslant P_n$, $\operatorname{rang} P_n\geqslant p-q$, *то существует проблема Шура, пошаговое решение которой приводит к построению произведения* (2).

2°. Ясно, что произведение (1) является элементарным кратным множителем неполного ранга.

Выясним структуру подпространства типа K, соответствующего этому произведению. Целесообразно здесь исходить из последнего множителя $b_n(\zeta)$. Ему, как легко видеть, соответствует подпространство $L_n=P_nE_p=\Delta_{P_n}$.

Рассмотрим теперь произведение двух множителей $B^1(\zeta)=b_{n-1}(\zeta)\times$

$\times b_n(\zeta)$. Имеем $\theta^{(n-1)}(\zeta)=b_{n-1}(\zeta)\,b_n(\zeta)\{\omega(\zeta)\}=b_{n-1}(\zeta)\{\theta^{(n)}(\zeta)\}=c_0^{(n-1)}+$ $+c_1^{(n-1)}\zeta+\ldots$, где $\theta^{(n)}(\zeta)=b_n(\zeta)\{\omega(\zeta)\}=c_0^{(n)}+\ldots$

Отсюда получаем для $B^1(\zeta)$ следующее подпространство типа K: $L_{n-1}=\Delta P_{n-1}\oplus T_n^{[-1]*}\Delta P_n$, где T_n—матрица, связывающая тейлоровые коэффициенты параметра с коэффициентами результата дробно-линейного преобразования.

Очевидно, проектор на L_{n-1} имеет вид

$\mathcal{P}^{(n-1)}=\left|\begin{array}{c|c} P_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & Q_{n-1}\end{array}\right|$, где Q_{n-1}—проектор на подпространство $T_n^{[-1]*}\Delta P_n$.

Продолжение этого процесса приводит к следующим рекуррентным построениям:

$$L_0=\Delta P_0\oplus T_1^{[-1]*}L_1,\quad L_1=\Delta P_1\oplus T_2^{[-1]*}L_2,\ \ldots,\ L_n=\Delta P_n. \tag{3}$$

Ясно, что L_0—подпространство типа K для всего произведения $B_n(\zeta)$. Ортопроектор на него имеет вид

$$\mathcal{P}^{(0)}=\left|\begin{array}{c|c} P_0 & 0 \\ \hline 0 & Q_0\end{array}\right|,$$

в котором Q_0—ортопроектор на подпространство $T_1^{[-1]*}L_1$.

Обратно, если $B_n(\zeta)$ произвольный элементарный кратный множитель неполного ранга, параметризованный относительно подпространства типа K, имеющего структуру (3), то правильное отщепление слева от него двучленных множителей приводит к произведению Бляшке—Потапова, соответствующему пошаговому решению некоторой задачи Шура.

Заметим, что даже в той простой ситуации, когда проектор на подпространство типа K имеет блочно-диагональную структуру, правильное отщепление двучленных множителей не всегда приводит к пошаговому процессу.

Ереванский государственный университет
Харьковский государственный университет

Լ. Հ. ԳԱԼՍՏՅԱՆ, Վ. Կ. ԴՈՒԲՈՎՈՅ

Շուրի վերասերված խնդրի մասին

Հոդվածը նվիրված է Շուրի վերասերված խնդրի և Բլյաշկե-Պոտապովի վերջավոր արտադրյալների փոխադարձ համապատասխանության հարցերին։ Բերված են բավարար պայմաններ, որոնց առկայության դեպքում տվյալ վերջավոր արտադրյալին համապատասխանող Շուրի խնդիրը միակն է։

Պարզված է այն K տիպի ենթատարածությունների ստրուկտուրան, որոնց համապատասխանող տարրական բազմապատիկ արտադրիչների վերլուծությունը երկանդամ արտադրիչների բերում է Շուրի խնդրի քայլ առ քայլ լուծմանը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. А. Галстян,* ДАН АрмССР, т. 63, № 1 (1976). [2] *Л. А. Галстян,* Изв. АН АрмССР. Математика, т. 12, № 3 (1977). [3] *В. К. Дубовой,* Анализ в бесконечномерных пространствах и теория операторов, Киев, Наукова думка, 1983. [4] *В. К. Дубовой,* Теория функций, функц. анализ и их прил. ХГУ, вып. 42 (1984).