

УДК 513.8

МАТЕМАТИКА

М. И. Карахянч

# Почти-периодичность в спектральном анализе нормальных операторов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 8/VI 1985)

Пусть  $B(X)$  — банахова алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих на комплексном банаховом пространстве  $X$ . Если для оператора  $S \in B(X)$  имеет место равенство  $\|e^{itS}\| = 1$  для всех  $t \in \mathbb{R}$ , то оператор  $S$  называют эрмитовым (см. <sup>(1,2)</sup>). Оператор  $A \in B(X)$  назовем нормальным, если  $A = H + iK$ , где  $H, K \in B(X)$  — коммутирующие эрмитовы операторы. Нетрудно видеть, что для нормального оператора  $A$  представление в виде  $H + iK$  единственно.

Пусть  $S$  — компактный эрмитов оператор, действующий в слабо полном банаховом пространстве  $X$ , тогда  $e^{itS}$  — изометрическое представление группы  $\mathbb{R}$  в пространстве  $X$ . Как показал Ю. И. Любич <sup>(3)</sup> (см. также <sup>(4)</sup>), для полноты системы собственных векторов компактного эрмитова оператора  $S$  в слабо полном банаховом пространстве  $X$  (что эквивалентно полноте системы собственных векторов представления  $e^{itS}$ ) необходимо и достаточно, чтобы для каждого  $x \in X$  и  $\varphi \in X^*$  функция  $\varphi(e^{itS}x)$  была боровской почти-периодической функцией на  $\mathbb{R}$ .

В данной работе с использованием методики работ <sup>(3,4)</sup> будет получено обобщение этих результатов для нормальных операторов как в ограниченном, так и неограниченном случаях.

Пусть  $G$  — локально компактная,  $\sigma$  — компактная абелева группа. Обозначим через  $C_{AP}(G)$  банахову алгебру равномерных почти-периодических функций на группе  $G$ , наделенную  $\sup$ -нормой. Если алгебру  $C_{AP}(G)$  пополнить по предгильбертовой структуре, определяемой скалярным произведением  $\langle f, \psi \rangle_b = M[f\bar{\psi}]$ , где  $M[f\bar{\psi}] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda(I_n)} \int_{I_n} f\bar{\psi} d\lambda$  (см. <sup>(5)</sup>, с. 323), то получится гильбертово прос-

транство почти-периодических функций Безиковича на группе  $G$ , которое обозначают через  $B^2(G)$ .

Отметим, что унитарные характеры  $\hat{G}$  образуют в пространстве  $B^2(G)$  ортонормированный базис; нетрудно видеть, что естественный изоморфизм  $C_{AP}(G) \simeq C[b(G)]$ , где  $b(G)$  — боровский компакт группы  $G$ , продолжается до изометрического изоморфизма  $B^2(G) \simeq L^2[b(G)]$ , где  $L^2[b(G)]$  строится по нормированной мере Хаара  $d\mu$  на группе  $b(G)$ .

Пусть  $T: G \rightarrow \text{Aut}(X)$  — изометрическое представление группы  $G$  в пространстве  $X$ , т. е.  $\|T(g)\| = 1$  для каждого  $g \in G$ . Отметим, как это принято в теории представлений топологических групп, что все рассматриваемые здесь представления предполагаются сильно непрерывными. Вектор  $x \in X$  ( $x \neq 0$ ) будем называть собственным вектором представления  $T$ , если существует характер  $\chi \in \hat{G}$  такой, что  $T(g)x = \chi(g)x$  для каждого элемента  $g \in G$ .

**Теорема 1.** Пусть  $X$  — слабо полное банахово пространство,  $G$  — локально компактная,  $\tau$  — компактная абелева группа и  $T$  — изометрическое представление группы  $G$  в пространстве  $X$ . Тогда для того чтобы система собственных векторов представления  $T$  была полна в пространстве  $X$ , необходимо и достаточно, чтобы для каждого  $x \in X$  и  $\varphi \in X^*$  функция  $\varphi(T(g)x) \in C_{AP}(G)$ .

**Доказательство.** Необходимость. Пусть по  $\varepsilon > 0$ ,  $\|x - \sum_{k=1}^m x_k\| < \varepsilon$ , где  $T(g)x_k = \chi_k(g)x_k$  для всех  $g \in G$  и  $k = 1, \dots, m$ , тогда

$\left| \varphi(T(g)x) - \sum_{k=1}^m \varphi(x_k) \chi_k(g) \right| \leq \varepsilon \|\varphi\|$ , откуда и следует, что функция  $\varphi(T(g)x) \in C_{AP}(G)$ .

**Достаточность.** Пусть для каждого элемента  $x \in X$  и  $\varphi \in X^*$  функция  $\varphi(T(g)x) \in C_{AP}(G)$ . Сопоставим функции  $\varphi(T(g)x)$  ее ряд Фурье в пространстве  $B^2(G)$ , т. е.  $\varphi(T(g)x) \sim \sum_{\lambda \in \hat{G}} c_\lambda \cdot \chi_\lambda(g)$ , где  $c_\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda(H_n)} \times \int_{H_n} \varphi(T(g)x) \overline{\chi_\lambda(g)} d\lambda(g)$ .

В силу слабой полноты пространства  $X$  существует слабый предел

$$P_\lambda x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda(H_n)} \int_{H_n} T(g)x \overline{\chi_\lambda(g)} d\lambda(g).$$

Покажем, что *i)*  $P_{\lambda_\alpha} \cdot P_{\lambda_\beta} = \delta_{\alpha, \beta} P_{\lambda_\alpha}$ ;

*ii)*  $T \cdot P_\lambda x = \chi_\lambda P_\lambda x$ .

Так как  $T$  — изометрическое представление группы  $G$ , то  $\|P_\lambda\| \leq 1$ . Проверим свойство *i)*. Пусть  $x \in X$ , тогда

$$\begin{aligned} P_{\lambda_\alpha} \cdot P_{\lambda_\beta} x &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_\alpha(H_n)} \int_{H_n} T(g) [P_{\lambda_\beta} x] \overline{\chi_{\lambda_\alpha}(g)} d\lambda_\alpha(g) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_\alpha(H_n)} \int_{H_n} T(g)x \overline{\chi_{\lambda_\alpha}(g)} d\lambda_\alpha(g) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_\beta(H_n)} \int_{H_n} \chi_{\lambda_\alpha}(h) \overline{\chi_{\lambda_\beta}(h)} d\lambda_\beta(h) = \\ &= \langle \chi_{\lambda_\alpha}, \chi_{\lambda_\beta} \rangle_b \cdot P_{\lambda_\alpha} x = \delta_{\alpha, \beta} P_{\lambda_\alpha} x. \end{aligned}$$

Покажем выполнение свойства *ii)*. Для  $g \in G$  имеем

$$T(g)P_\lambda x = T(g) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda(H_n)} \int_{H_n} T(h)x \overline{\chi_\lambda(h)} d\lambda(h) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\chi(H_n)} \int_{H_n} T(h) x \overline{\chi(h-g)} d\lambda(h) = \chi(g) P_x x.$$

Таким образом, вектор  $x(\chi) = P_x x$  является собственным вектором представления  $T$ , ибо  $Tx(\chi) = TP_x x = \chi P_x x = \chi x(\chi)$ , где  $\chi \in \hat{G}$ . Пусть теперь  $\varphi \in X^*$  — такой функционал, что  $\varphi(x(\chi)) = 0$ , тогда  $\varphi_x = \varphi(P_x x) = \varphi(x(\chi)) = 0$ . Так как унитарные характеры  $\chi \in \hat{G}$  образуют ортонормированный базис в  $B^*(G)$ , то  $\varphi(T(g)x) = 0$ , откуда  $\varphi(x) = 0$  и значит  $\varphi = 0$ .

Теорема 1 доказана.

Отметим, что для изометрического представления локально компактной группы в рефлексивном пространстве аналогичный результат получен Ю. И. Любичем (см. (6)) исходя из других соображений.

Если использовать вышеуказанную теорему 1 применительно к конечному семейству  $\{A_1, \dots, A_N\}$  коммутирующих нормальных операторов из  $B(X)$ , то получается следующая

Теорема 2. Пусть  $X$  — слабо полное банахово пространство и  $\{A_1, \dots, A_N\}$  — конечное семейство коммутирующих, нормальных операторов из  $B(X)$ . Тогда для того чтобы система собственных векторов семейства  $\{A_1, \dots, A_N\}$  была полна в пространстве  $X$ , необходимо и достаточно, чтобы для каждого  $x \in X$  и  $\varphi \in X^*$  функция  $\varphi[e^{i(\langle \bar{s}, \bar{K} \rangle - \langle \bar{t}, \bar{H} \rangle)x}] \in C_{AP}(\mathbb{R}^{2N})$ , где  $\langle \bar{s}, \bar{K} \rangle = \sum_{p=1}^N s_p K_p$ ,  $\langle \bar{t}, \bar{H} \rangle =$

$$\sum_{p=1}^N t_p H_p; \quad H_p = \frac{A_p + A_p^+}{2}, \quad K_p = \frac{A_p - A_p^+}{2i}; \quad p=1, \dots, N.$$

В случае, когда при каждом  $p=1, \dots, N$ ,  $A_p = A_p^+$ , получается эрмитов вариант теоремы 2.

Рассмотрим случай неограниченных операторов. Пусть  $A$  — линейный оператор, заданный на линейном многообразии  $D(A) \subset X$ . Оператор  $A$  назовем нормально-корректным (н-корректным) (см. (4)), если:

1)  $A$  — замкнутый оператор и существует замкнутый линейный оператор  $A^+$  такой, что  $D = D(A) \cap D(A^+)$  плотно в  $X$  и  $AA^+x = A^+Ax$  для каждого  $x \in D$ ;

$$2) \text{ задача } \begin{cases} s \frac{\partial x(s, t)}{\partial s} + t \frac{\partial x(s, t)}{\partial t} = i(sK - tH)x(s, t) \\ x(0, 0) = x_0, \quad -\infty < s, t < \infty \end{cases}$$

при любом  $x_0 \in D$  имеет единственное решение  $x(s, t)$  в классе сильно дифференцируемых вектор-функций, где  $H = \frac{A + A^+}{2}$ ,  $K = \frac{A - A^+}{2i}$ ;

3) операторы  $V(s, t)$ , определяемые соотношением  $x(s, t) = V(s, t)x_0$ , удовлетворяют условию  $\|V(s, t)\| = 1$  при каждом  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ . Нетрудно видеть, что если оператор  $A$  н-корректен, то семейство операторов  $\{V(s, t)\}_{(s, t) \in \mathbb{R}^2}$  — сильно непрерывная двухпараметрическая группа, для которой инфинитезимальными производящими операторами являются  $iK$  и  $-iH$ .

Как и выше, из теоремы 1 выводится следующая

**Теорема 3.** Для того чтобы система собственных векторов  $n$ -корректного оператора  $A$  была полна в слабо полном банаховом пространстве  $X$ , необходимо и достаточно, чтобы для каждого  $x \in X$  и  $\varphi \in X^*$  функция  $\varphi[V(s, t)x] \in C_{AP}(R^2)$ .

Отметим, что аналогичную теорему можно получить для конечного семейства коммутирующих  $n$ -корректных операторов.

Ереванский государственный университет

Մ. Ի. ԿԱՐԱԽԱՆՅԱՆ

Համարյա-պարբերականությունը նորմալ օպերատորների սպեկտրալ անալիզում

**Դիցուք**  $G$ —լոկալ կոմպակտ,  $\sigma$ -կոմպակտ արելյան խումբ է և  $C_{AP}(G)$  բոլոր հավասարաչափ համարյա-պարբերական ֆունկցիաների բանախյան հանրահաշիվն է,  $G$ -խմբի վրա որոշված,  $\sup$ -նորմայի նկատմամբ: Այդ դեպքում տեղի ունի հետևյալ արդյունքը:

**Թեորեմ:** Դիցուք  $X$ -թույլ լրիվ Բանախի տարածություն է,  $G$ -լոկալ կոմպակտ,  $\sigma$ -կոմպակտ արելյան խումբ է և  $T$ -ն այդ խմբի իզոմետրիկ ներկայացումն է  $X$  տարածությունում:

Այդ դեպքում, որպեսզի  $T$  ներկայացման սեփական վեկտորների ընտանիքը կազմի լրիվ սիստեմ  $X$  տարածությունում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր  $x \in X$  և  $\varphi \in X^*$ ,  $\varphi(T(g)x) \in C_{AP}(G)$ .

Այս թեորեմը թույլ է տալիս ստանալ Յու. Ի. Լյուբիչի [3], [4] արդյունքների ընդհանրացումները: Մասնավորապես  $\{A_1, \dots, A_N\}$  նորմալ, ուղիղակի, միմյանց հետ տեղափոխելի օպերատորների համակարգի համար ստացվում է սեփական վեկտորների լրիվության չափանիշ:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> В. Э. Кацнельсон, Сб. мат. исследований, Кншпнев, т. 5, № 3 (1970). <sup>2</sup> Е. А. Горин, Вестн. Харьковского ун-та, № 205, прикл. математика и механика, вып. 45 (1980). <sup>3</sup> Ю. Н. Любич, ДАН СССР, т. 132, № 3 (1960). <sup>4</sup> Ю. Н. Любич, УМН, т. 18, вып. I (109) (1963). <sup>5</sup> Э. Хьюитт, К. Росс, Абстрактный гармонический анализ, т. I, Наука, М., 1975. <sup>6</sup> Ю. Н. Любич, Введение в теорию банаховых представлений групп, Вища школа, Харьков, 1985.