ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXXIII 1986 4

МАТЕМАТИКА

УДК 513.83+519.55

А. А. Бабаджанян

О «конструктивности» в теореме о неподвижной точке

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р.Варшамовым 2/VII 1984)

Роль теорем о неподвижной точке общеизвестна. Оставаясь в рамках чисто топологических условий (в отличие от теоремы о сжимающем отображении), они служат основой доказательства многих теорем существования. Теорема Боля—Брауэра составляла основу доказательства основной теоремы фон Неймана в теории игр, а также теорем о существовании равновесия в моделях математической экономики (некоторые упомянутые результаты сейчас легче получить, используя теорему о неподвижной точке Какутани для многозначных отображений).

Как известно, теорема о неподвижной точке Боля—Брауэра и ее обобщения—теорема Шаудера, Тихонова, Какутани, Лефшеца—Хопфа ([1-4]) неконструктивны, в них нет такой простой процедуры, как метод последовательных приближений Пикара (в линейном случае Пикара—Пуанкаре—Неймана) в условиях теоремы о сжимающем отображении Каччиополи—Банаха.

В 1967 г. Скарф ([5]) предложил основанный на лемме Шпернера численный метод нахождения неподвижной (ε-неподвижной) точки непрерывного отображения симплекса из R^n в себя.

Непрерывный аналог метода Скарфа в 1974 г. был предложен в ([6]), где использовалось краткое доказательство Хирша ([7]) о неретракции шара на свою границу. Возможности этих методов, однако, сильно ограничены размерностью задачи. Более полная библиография дана в ([8]).

1. Пусть F—непрерывное отображение, действующее в конечномерном нормированном пространстве R^n и замкнутый шар $B^n \subset R^n$, множество неподвижных точек отображения F есть $\mathrm{Fix}(F)$. Необходимые определения и обозначения взяты из ([2,3]).

Теорема 1. *Для любого непрерывного отображения F: $: B^n \to B^n$ всякая точка сгущения последовательности неподвижных точек*

$$x_{k+1} = Fr_k(x_{k+1}) \quad (\text{или } x_{k+1} = r_k F(x_{k+1})) \quad k=0, 1, \ldots, \tag{1}$$

где начиная с произвольного r_0 ретрагирующие отображения $r_k: B^n \to B^n$, $(k=0, 1, \ldots)$ удовлетворяют условию:

(B) $\quad r_k(x_k) = x_k \quad$ (соответственно $r_k F(x_k) = F(x_k)$) $\quad k=1, \ldots,$

является неподвижной точкой отображения F.

Доказательство следует из компактности B^n и условия (В). Заметим, что если $\mathrm{Fix}(F)\cap r_k(B^n)\neq\varnothing$ для $k>k'$, то последовательность (1) может „обрываться" на неподвижной точке (или точках) отображения F.

Теорема 2. *В условиях теоремы Боля-Брауэра, „с вероятностью один" предел всякой сходящейся подпоследовательности последовательности неподвижных точек*

$$x_{k+1}=Fr_k(x_{k+1}) \quad (\text{или} \quad x_{k+1}=r_kF(x_{k+1})) \quad k=0,\ 1,\ \ldots, \tag{2}$$

где начиная с произвольного r_0 *ретрагирующие отображения* $r_k: B^n\to B^n$ *удовлетворяют условию*:

(В) $\quad r_k(x_k)=x_k \quad$ (соответственно $r_kF(x_k)=F(x_k)$) $\quad k=1,\ 2,\ \ldots,$

и $\quad x_k\neq x_{k'} \quad (k\neq k')$

является неподвижной точкой отображения F.

Схема доказательства. Положим отображения F и r_k гладкими. Отображения $Fr_k(x)$ (или $r_kF(x)$), $k=0,\ 1,\ldots$ гладко гомотопны F, т. е. существует гомотопия $H(t,\ x): B^n\times(0,\ 1]\to R^n$, и $t=t(s)$. Пусть $t(1)=1$, $t(s)=0$ при $s\to 0$, где $H_{t(1/k+1)}(x)=x-Fr_k(x)$ (или $H_{t(1/k+1)}(x)=$ $=x-r_kF(x)$).

По теореме Сарда „с вероятностью один" 0 есть регулярное значение отображения $H_{t(1/k+1)}(x)$. С учетом того, что B^n компактно и $\mathrm{Fix}(F)$ конечно, существует конечное число связных компонент (гладких одномерных многообразий) $H^{-1}(0)$, для которых, в силу условия (В), крайняя точка является неподвижной точкой F.

Замечание 1. Если отображение F имеет единственную неподвижную точку, тогда последовательность (1) сама сходится к неподвижной точке F.

Такая „конструктивность" имеет место и в условиях теоремы Шаудера.

2. Пусть $F: E\to E$ линейный вполне непрерывный оператор, действующий в банаховом пространстве E. Рассмотрим уравнение второго рода

$$x=Fx+f \qquad (f\in E) \tag{3}$$

и пусть существует непрерывный обратный $(I-F)^{-1}$. Тогда единственное решение (3) может быть найдено последовательно из приближенного уравнения

$$x_{k+1}=FP_kx_{k+1}+f \quad (\text{или} \quad x_{k+1}=P_kFx_{k+1}+f)\ k=0,\ 1,\ \ldots, \tag{4}$$

где линейный, идемпотентный оператор, определенный на всем E, (проектор) $P_k: E\to E_{(k)}\subset E$ ($E_{(k)}$—замкнутые подпространства из E шага k) удовлетворяет условиям (B) $P_kx_k=x_k$ (соответственно $P_kFx_k=Fx_k$) $k=0,\ 1,\ldots$, начиная с произвольного p_0.

Будем полагать, что $\|P_k\|<C$ равномерно по k.

Теорема 3. *Последовательность решений уравнения* (4) *сходится к решению* (3), *если существуют непрерывные обратные* $(I-FP_k)^{-1}$ (соответственно $(I-P_kF)^{-1}$) *для любого* $k=0,\ 1,\ldots$

Легко видеть, что (4) можно решить в подпространстве $E_k = P_k E$ (вообще конечномерном)

$$X_{k+1}=P_kFX_{k+1}+P_kf \quad (P_kf\neq 0),$$

а затем скорректировать на E

$$x_{k+1}=FX_{k+1}+f \quad (k=0,\ 1,\ \ldots).$$

Соответственно, (4) может быть решено следующим образом

$$X_{k+1}=P_kFX_{k+1}+P_kFf \quad (P_kFf\neq 0),$$

$$x_{k+1}=X_{k+1}+f \quad (k=0,\ 1,\ \ldots).$$

Такие методы решения линейных уравнений даны в ([9]) и названы проекционно-связными ([10]).

Отдельный интерес представляют эти методы с ортогональным проектором, удовлетворяющим условиям (В).

Замечание 2. В конечномерном случае проекционно-связные методы позволяют уменьшать размерность решаемой системы, а при выборе P_k в специальном виде—распараллеливать процесс решения.

3. В. п. п. 1,2 предлагается способ аппроксимации исходного оператора F последовательностью $F_{k+1}=FP_k$ (или, $F_{k+1}=P_kF$) $k=0, 1, \ldots$. В этой связи, вопросы устойчивости индекса линейных, фредгольмовых операторов $I-F_{k+1}$, аналогично равномерной и компактной аппроксимации, выделены в самостоятельную работу.

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Ա. Ա. ԲԱԲԱՋԱՆՅԱՆ

Անշարժ կետի թեորեմում «կոնստրուկտիվության» մասին

Հայտնի է, որ Բրաուերի՝ անշարժ կետի մասին թեորեմը և նրա ընդհանրացումները՝ Շաուդերի, Տիխոնովի, Կակուտանիի, Լեֆշեց-Հոպֆի թեորեմը ոչ կոնստրուկտիվ են, նրանցում չկա այնպիսի հասարակ արարողություն, ինչպիսին է Պիկարի հաջորդական մոտավորությունների մեթոդը (գծային դեպքում՝ Պիկար-Պուանկարե-Նեյմանի) Կաչիոպոլի-Բանախի սեղմող արտապատկերման մասին թեորեմի պայմաններում։

Աշխատանքում ներկայացված է անշարժ կետի թեորեմում «կոնստրուկտիվ» սխեմա։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. С. Понтрягин,* Основы комбинаторной топологии. М., 1947. [2] *J. Dugundji. A. Granas,* Fixed-Point Theory. v. 1.: Warsaw, Pol. Sci. Pub., 1982. [3] *М. А. Красносельский, П. П. Забрейко,* Геометрические методы нелинейного анализа, М., Наука, 1975. [4] *Дж. Милнор, А. Уоллес,* Дифференциальная топология. М., Мир, 1972. [5] *H. Scarf,* SIAM J. Appl. Math., v. 15, 1967, p. 1328—1343 [6] *R. B. Kellog, T. Y. Li, J. A. Yorke.* In: Computing Fixed Points with Applications. S. Karamadian (ed.), New-York, 1977, pp. 133—147. [7] *M. W. Hirsch.* Proc. of AMS, 14, 1963, p. 364—365. [8] *М. Дж. Тодд.* Вычисление неподвижных точек и приложения к экономике. М., Наука, 1983. [9] *А. А. Бабаджанян.* ДАН Арм. ССР т. 77, №4(1983). [10] *А. А. Бабаджанян,* в кн.: Труды ВЦ АН АрмССР и ЕГУ. Мат. вопр. кибернетики и вычислительной техники. т. 13 (1984).