ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXIII 1986 3

УДК 519.21

МАТЕМАТИКА

С. М. Нариманян

Об одном классе сингулярных цепей Маркова

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. В. Амбарцумяном 21/VI 1985)

Некоторые вопросы статистической физики требуют изучения предельного распределения аддитивных функционалов от сингулярных марковских цепей, т. е. цепей, не удовлетворяющих условию равномерно сильного перемешивания. Простейшей такой цепью является цепь X_n на окружности S^1, которая задается переходными вероятностями $p(x, x\pm\alpha)=\frac{1}{2}$. Здесь $x\in S^1$, α—иррациональное число, сложение по mod 1. Эта цепь изучалась в заметке [1] для чисел α общего положения, т. е. плохо аппроксимируемых рациональными числами. Другой метод изучения подобных цепей был предложен в [2]. Цель настоящей заметки — исследовать предельное поведение аддитивного функционала $S_n=\sum_{k=1}^{n} f(X_k)$ для гладких функций f и чисел α, быстро аппроксимируемых рациональными числами. Выясняется, что в этом случае, вообще говоря, в отличие от [1] и [2] центральная предельная теорема в стандартной форме уже не имеет места.

Основные предположения. Пусть существует достаточно большое $\beta>0$ таксе, что

$$\left|\alpha-\frac{p_N}{q_N}\right|<\frac{1}{q_N^{\beta}}, \tag{1}$$

где p_N/q_N—N-ная подходящая дробь числа α [3], и пусть f—гладкая функция, которая разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье вместе с первой производной. Будем для этого считать, что существуют $k_1\geqslant k_2>4$ и постоянные A_1 и A_2 такие, что

$$\frac{A_1}{r^{k_1}}\leqslant|f_r|^2\leqslant\frac{A_2}{r^{k_2}}, \tag{2}$$

где f_r—коэффициенты Фурье функции f. Значение числа β уточним далее. Предположим также (не ограничивая общности), что $f_0=\int_0^1 f(x)dx=0$. Здесь интегрирование совершается по мере Лебега на S^1, которая является единственной инвариантной мерой для цепи X_n.

Согласно [1], [2] при изучении цепей такого типа важную роль играет ряд $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|f_m|^2}{1-\cos 2\pi m\alpha}$, содержащий „малые знаменатели". Через сумму этого ряда выражалась предельная дисперсия $\sigma^2 = \lim_{n\to\infty} D(S_n/\sqrt{n})$. В нашем случае в силу наложенных условий (1) и (2) этот ряд расходится, так как

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|f_m|^2}{1-\cos 2\pi m\alpha} \geqslant \sum_{N=1}^{\infty} \frac{|f_{q_N}|^2}{1-\cos 2\pi q_N\alpha} =$$

$$= \sum_{N=1}^{\infty} \frac{|f_{q_N}|^2}{2\sin^2\pi(q_N\alpha - p_N)} \geqslant c\sum_{N=1}^{\infty} q_N^{2(\beta-1)-k_1} = \infty. \tag{3}$$

Здесь, конечно, $\beta \geqslant \frac{k_1}{2}+1$. Тем самым мартингальный метод ([2]) неприменим. Однако метод ([1]), основанный на аппроксимации цепи X_n конечными цепями $X_n^{(N)}$, по-прежнему работает.

Пусть цепь X_n начинает свое движение из точки $x_0 \in S^1$. Рассмотрим последовательность цепей $X_n^{(N)}$, выходящих из точки x_0 с переходными вероятностями $p\left(x, x\pm\frac{p_N}{q_N}\right) = \frac{1}{2}$. Состояния цепи $X_n^{(N)}$ это точки вида $\varepsilon_k = x_0 + \frac{k}{q_N}$, $k=0, 1, \ldots, q_N-1$. Единственным стационарным распределением для цепи $X_n^{(N)}$ является равномерное распределение на вершинах правильного q_N-угольника. Через $P^{(N)}$, $M^{(N)}$, $D^{(N)}$ обозначим соответствующие характеристики для цепи $X_n^{(N)}$ в стационарном режиме. Как и в ([1]), нетрудно убедиться, что достаточно изучить цепь $X_n^{(N)}$ при инвариантном начальном распределении.

Обозначим через $S_n^{(N)} = \sum_{k=1}^{n} f(X_k^{(N)})$. Легко видеть, что

$$M^{(N)}S_n^{(N)} = n \cdot \frac{1}{q_N}\sum_{k=0}^{q_N-1} f(\varepsilon_k) = n \cdot m(N).$$

Но, так как
$$m(N) = \frac{1}{q_N}\sum_{r=0}^{q_N-1}\sum_k e^{2\pi ik\left(x_0+\frac{r}{q_N}\right)} =$$

$$= \sum_k f_k e^{2\pi ikx_0}\frac{1}{q_N}\sum_{r=0}^{q_N-1} e^{\frac{2\pi ikr}{q_N}} = \sum_m f_{mq_N} e^{2\pi imq_Nx_0},$$

то
$$|M^{(N)}S_n^{(N)}| \leqslant 2n\sum_{m=1}^{\infty} |f_{mq_N}| \leqslant \frac{cn}{q_N^{k_1}}. \tag{4}$$

Далее, при каждом N $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}D^{(N)}S_n^{(N)} = \sigma_N^2$, где $\sigma_N^2 =$

$$= \sum_{r=1}^{q_n-1} \frac{1+\cos\frac{2\pi rp_N}{q_N}}{1-\cos\frac{2\pi rp_N}{q_N}} \left|\frac{1}{q_N}\sum_{j=0}^{q_N-1} f(\varepsilon_j)e^{-2\pi irj}\right|^2. \tag{5}$$

Это можно получить либо непосредственным вычислением, либо применив результат ([2]) к цепи $X_n^{(N)}$. Преобразуя соотношение (5), получим

$$\sigma_N^2=\sum_{r=1}^{q_N-1}\frac{1+\cos\dfrac{2\pi r p_N}{q_N}}{1-\cos\dfrac{2\pi r p_N}{b_N}}\left|\sum_m f_{mq_N+r}\,e^{2\pi i m q_N x_0}\right|^2,$$

откуда при $N\to\infty$

$$\sigma_N^2\sim\sum_{r=1}^{q_N-1}\frac{1+\cos\dfrac{2\pi r p_N}{q_N}}{1-\cos\dfrac{2\pi r p_N}{q_N}}|f_r|^2\sim-\sum_{r=1}^{q_N-1}|f_r|^2+2\sum_{r=1}^{q_N-1}\frac{|f_r|^2}{1-\cos 2\pi r\alpha}=\hat{\sigma}_N^2. \tag{6}$$

Поэтому в силу (3)

$$\sigma_N^2\to\infty,\quad N\to\infty. \tag{7}$$

Теперь заметим, что для каждого N сумма $S_n^{(N)}$ при стандартной нормировке нормально распределена, причем в силу (4) имеет место следующая равномерная оценка: при любом начальном распределении μ

$$\left|P_\mu\left(\frac{S_n^{(N)}-nm(N)}{\sqrt{n}\sigma_N}<x\right)-\Phi(x)\right|\leqslant\frac{c_1q_N}{\sqrt{n}}+c_2q_N^4\left(1-\frac{2}{q_N^2}\right)^n. \tag{8}$$

Поэтому при $n\geqslant q_N^{2+\varepsilon}$, $\varepsilon>0$ уже имеет место центральная предельная теорема с хорошим остатком. Для дальнейшего нам нужна еще следующая простая оценка:

$$\left|S_n-S_n^{(N)}\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|f(X_k)-f(X_k^{(N)})|\leqslant c\sum_{k=1}^{n}|X_k-X_k^{(N)}|\leqslant c_1n^2\left|\alpha-\frac{p_N}{q_N}\right|\leqslant\frac{c_1n^2}{q_N^\beta} \tag{9}$$

Теперь представим

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}\hat{\sigma}_N}=\frac{S_n-S_n^{(N)}}{\sqrt{n}\hat{\sigma}_N}+\frac{S_n^{(N)}-nm(N)}{\sqrt{n}\hat{\sigma}_N}+\frac{nm(N)}{\sqrt{n}\hat{\sigma}_N} \tag{10}$$

и исследуем асимптотическое поведение суммы S_n по подпоследовательности $n_N=q_N^{2+\varepsilon}$, $\varepsilon<\dfrac{2}{3}$. Из соотношений (6) и (9) имеем, что

$$\left|\frac{S_{n_N}-S_{n_N}^{(N)}}{\sqrt{n_N}\hat{\sigma}_N}\right|\leqslant\frac{c_1q_N^{2+\frac{3}{2}\varepsilon}}{q_N^\beta}\to0,\quad N\to\infty, \tag{11}$$

если, конечно, $\beta>2+\dfrac{3}{2}\varepsilon$. А из (4) получим, что

$$\left|\frac{n_Nm(N)}{\sqrt{n_N}\hat{\sigma}_N}\right|\leqslant\frac{cq_N^{1+\frac{\varepsilon}{2}}}{q_N^{1+\frac{k_2}{2}}}\to0,\quad N\to\infty. \tag{12}$$

Совмещая соотношения (8), (10)—(12), приходим к следующему результату.

Теорема. *Пусть f гладкая функция на S^1 такая, что коэффициенты Фурье f_r функции f удовлетворяют условию*

$$\frac{A_1}{r^{k_1}}\leqslant|f_r|^2\leqslant\frac{A_2}{r^{k_2}},\quad k_1\geqslant k_2>4,$$

а α—иррациональное число такое, что $\left|\alpha-\dfrac{p_N}{q_N}\right|<\dfrac{1}{q_N^{\beta}}$.

Тогда если $\beta\geqslant 1+\dfrac{k_1}{2}$, *то при любом начальном распределении* μ

$$\lim_{N\to\infty} P_\mu\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n_N-1} f(X_k)}{\sqrt{n_N}\,\hat{\sigma}_N}<x\right)=\Phi(x), \tag{13}$$

где $n_N=q_N^{2+\varepsilon}$, $0<\varepsilon\leqslant\dfrac{2}{3}$,

$$\hat{\sigma}_N^2=-\sum_{r=1}^{q_N-1}|f_r|^2+\sum_{r=1}^{q_N-1}\frac{|f_r|^2}{1-\cos 2\pi r\alpha}\to\infty,\quad N\to\infty.$$

Замечание 1. Легко видеть, что условия на функцию f, на подпоследовательность n_N и число α могут быть существенно ослаблены. Однако по произвольным подпоследовательностям n_N соотношение (13) уже места не имеет.

Замечание 2. Если $\beta=\beta_N\to\infty$, $N\to\infty$, то, вообще говоря, даже при нестандартной нормировке асимптотической нормальности нет, а возникают взвешенные нормальные распределения (см. ([5])). Действительно, по подпоследовательности $n_N=q_N^{\beta_N/2}$ величины $nm(N)$ и σ_N^2 стремятся к ∞ и кроме того они зависят от начальной точки x_0. Если начальную точку x_0 взять равномерно распределенной на окружности S^1, то в силу соотношений (8), (10)—(11) возникнет взвешенное нормальное распределение.

Ереванский государственный университет

Ս. Մ. ՆԱՐԻՄԱՆՅԱՆ

Սինգուլյալ մարկովյան շղթաների մեկ դասի մասին

Դիցուք S^1 *միավոր երկարության շրջանագծի վրա տրված է* X_n *մարկովյան շղթան* $p(x, x\pm\alpha)=\dfrac{1}{2}$ *անցման հավանականություններով։ Այստեղ* $x\in S^1$, *α-ն իռացիոնալ թիվ է, գումարումը ըստ* mod 1։

Ուսումնասիրվում է $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} f(X_k)$ *ֆունկցիոնալի սահմանային վարքը* f *ողորկ ֆունկցիաների և ռացիոնալ թվերով արագ մոտարկվող* α *թվերի համար։ Ցույց է տրվում, որ այս դեպքում, ընդհանրապես ասած, ի տարբերություն* ([1])*-ի և* ([2])*-ի կենտրոնական սահմանային թեորեմը ստանդարտ տեսքով տեղի չունի։*

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. М. Нариманян*, ДАН АрмССР, т. 64, № 3, 129—136 (1977). [2] *М. И. Гордин, Б. А. Лифшиц*, ДАН СССР, т. 239, № 4, 766—777 (1978). [3] *А. Я. Хинчин*, Цепные дроби, М., Наука, 1978. [4] *Г. Ю. Алешкявичюс*, Литовский мат. сб., т. 6, № 3, 297—311 (1966). [5] *М. Л. Лоэв*, Теория вероятностей, М., ИЛ, 1962.