ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXIII 1986 3

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

С. Х. Дарбинян

# О панцикличности орграфов с большими полустепенями

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 30/V 1985)

Рассматриваются конечные орграфы без петель и кратных дуг. Все понятия и обозначения, не определяемые здесь, можно найти в ([1]).

Пусть $G$—орграф. Через $V(G)$ обозначается множество вершин $G$, а через $E(G)$ — множество его дуг. Для $A, B \subseteq V(G)$ и $x \in V(G)$ введем обозначения: $O(x)=\{y \in V(G)/xy \in E(G)\}$; $I(x)=\{y \in V(G)/yx \in E(G)\}$; $E(A \to B)=\{xy \in E(G)/x \in A,\ y \in B\}$.

Число $d(x)=id(x)+od(x)$, где $id(x)$ — полустепень захода, а $od(x)$—полустепень исхода вершины $x$, называется степенью вершины $x$. Запись $A \Rightarrow B$ означает, что если $y \in A$ и $z \in B$, то $yz \in E(G)$. Контур длины $k$ обозначается через $\vec{C}_k$, а подграф, порожденный множеством $A$, —через $\langle A \rangle$. Орграф с $p$ вершинами называется панцикличеcким, если он содержит контур любой длины $k$, $3 \leqslant k \leqslant p$. Обозначение $G_1 \subseteq G$ означает, что $G_1$ является подграфом $G$. Если $H$—неориентированный граф с множеством вершин $V(H)$, то через $H^*$ обозначается орграф с множеством вершин $V(H)$ и $yz \in E(H^*)$ тогда и только тогда, когда вершины $y$ и $z$ в $H$ смежны.

В работе ([2]) доказана следующая

Теорема А (*Р. Хагвист, Р. Фаудри, Р. Шелп* ([2])). *Пусть $H$ неориентированный граф с $2n+1$ вершинами, $n \geqslant 3$, в котором любая вершина имеет степень не меньше $n$. Тогда $H$—панциклический, или $H \cong (K_n \cup K_n)+K_1$, или $K_{n,n+1} \subseteq H \subseteq K_n+\bar{K}_{n+1}$.*

Аналогичный результат для орграфов получен в ([3]),

Теорема В ([3]). *Пусть $G$ является $(2n+1)$-вершинным орграфом с минимальными полустепенями исхода и захода не меньше $n$. Тогда $G$ является либо панциклическим, либо $G \in \{C_3^*, D_5, D_7, [(K_n \cup K_n)+K_1]^*\}$ (где орграфы $D_5$ и $D_7$ определены в ([5])), либо*

$$K^*_{n,n+1} \subseteq G \subseteq [K_n+\bar{K}_{n+1}]^*.$$

Для формулировки следующих теорем определим класс орграфов $H(n, n)$, $H(n, n-1, 1)$ и орграфы $H(2n)$ и $H'(2n)$.

$H(n, n)$ — множество $2n$-вершинных орграфов $G$, для которых $V(G)=A_1 \cup A_2$, $\langle A_1 \rangle \cong \langle A_2 \rangle \cong K_n^*$, $E(A_2 \to A_1)=\varnothing$, и для любой вершины $x \in A_1$ (соответственно $y \in A_2$) существует такая вершина $x_1 \in A_2$ (соответственно $y_1 \in A_1$), что $xx_1 \in E(G)$ (соответственно $y_1 y \in E(G)$).

$H(n, n-1, 1)$ — множество $2n$-вершинных орграфов $G$ с $V(G) = B_1 \cup B_2 \cup \{x\}$, где $|B_1| = n$ и $|B_2| = n-1$, для которых выполняются следующие условия:

1) $E(\langle B_1 \rangle) = \varnothing$ и для любых $z_1 \in B_1$ и $z_2 \in B_2$ $z_1z_2$, $z_2z_1 \in E(G)$;

2) либо $I(x) = B_2$ и $\{x\} \rightrightarrows B_1$ либо $O(x) = B_2$ и $B_1 \rightrightarrows \{x\}$.

$H(2n)$ — $2n$-вершинный орграф с множеством вершин $D_1 \cup D_2 \cup \{x_1, x_2\}$, для которого $\langle D_1 \rangle \cong \langle D_2 \rangle \cong K^*_{n-1}$, $O(x_1) = \{x_2\} \cup D_1$, $I(x_1) = D_1 \cup D_2$, $O(x_2) = D_1 \cup D_2$ и $I(x_2) = \{x_1\} \cup D_2$.

$H'(2n)$ — орграф полученный из $H(2n)$, после добавления дуги $x_2x_1$.

Теорема C ([4]). *Пусть $G$ — $p$-вершинный, $p \geq 5$, орграф с минимальной степенью не меньше $p-1$ и с минимальными полустепенями не меньшими $[(p-1)/2]$. Тогда либо $G$ содержит контур $\vec{C}_{p-1}$, либо $G \in \{H(2n), H'(2n), [(K_n \cup K_n) + K_1]^*, C_3^*\} \cup H(n, n)$, либо $G \subseteq K^*_{n,n}$, где $n = [p/2]$.*

Теорема D (([4]) и К. Томассен ([5]))*. *Пусть $G$ — $p$-вершинный, $p \geq 5$, орграф с минимальной степенью не меньше $p-1$ и с минимальными полустепенями не меньшими $[(p-1)/2]$. Тогда $G$ — гамильтоновый, кроме случая, когда $G \in H(n, n) \cup H(n, n-1, 1) \cup \{D_5, D_7, H_1, H_1', [(K_n \cup K_n) + K_1]^*\}$ (где орграфы $H_1$ и $H_1'$ определены в ([4])) или $K^*_{n,n+1} \subseteq G \subseteq (K_n + \bar{K}_{n+1})^*$, где $n = [p/2]$.*

В настоящей работе теорема B распространяется на случай произвольного $p$-вершинного ($p \geq 10$) орграфа с минимальной степенью не меньше $p-1$ и с минимальными полустепенями не меньшими $[(p-1)/2]$, т. е. доказывается следующая

Теорема. *Пусть $G$ является $p$-вершинным ($p \geq 10$) орграфом с минимальной степенью не меньше $p-1$ и с минимальными полустепенями не меньшими $[(p-1)/2]$. Тогда либо $G$ — панциклический, либо $G \cong [(K_n \cup K_n) + K_1]^*$, либо $K^*_{n,n+1} \subseteq G \subseteq (K_n + \bar{K}_{n+1})^*$, либо $G \in H(n, n) \cup H(n, n-1, 1) \cup \{H(2n), H'(2n)\}$, либо $G \subseteq K^*_{n,n}$, где $n = [p/2]$.*

Здесь приведем лишь схему доказательства теоремы.

Предположим, что утверждение теоремы не верно. Тогда для некоторого $m \in [3, p]$ $G$ не содержит контур длины $m$. Кроме того, так как $G \notin H(n, n)$, то $G$ является сильно связным. Сначала, используя теорему A, показывается, что $m \geq 6$. Из теорем C и D следует, что $m \leq p-2$ и $G$ содержит контур $\vec{C}_{p-1}$. Пусть $\vec{C}_{p-1} = x_1x_2 \ldots x_{p-1}x_1$ и $x \notin V(\vec{C}_{p-1})$. Из $d(x) = p-1$ и $\vec{C}_m \not\subset G$ легко получается, что для всех $i \in [1, p-1]$ имеет место

$$|E(x \to x_i)| + |E(x_{i+m-2} \to x_i)| = 1,$$

(индексы вершин контура $\vec{C}_{p-1}$ берутся по $\mathrm{mod}(p-1)$). Далее доказательство теоремы проводится так, как доказательство теоремы B, с некоторыми отклонениями.

Вычислительный центр Академии наук
Армянской ССР и Ереванского государственного университета

---

* Эта теорема для четных $p$ доказана в ([4]), а для нечетных $p$ — в ([5]).

Ս. Խ. ԴԱՐԲԻՆՅԱՆ

## Մեծ կիսաստիճաններով կողմնորոշված գրաֆների պանցիկլիկության մասին

*Ներկա աշխատանքում ապացուցվում է հետևյալ պնդումը։*

***Թեորեմ.*** Դիցուք $G$-ն հանդիսանում է $p$-գագաթանի ($p\geqslant 10$) կողմնորոշված գրաֆ, որի ցանկացած գագաթի աստիճանը փոքր չէ $(p-1)$-ից, իսկ կիսաաստիճանները փոքր չեն $[(p-1)/2]$. Այդ դեպքում կամ ա) $G$-ն հանդիսանում է պանցիկլիկ, կամ բ) $G\cong[(K_n\cup K_n)+K_1]^*$ կամ գ) $G\in H(n, n)\cup H(n, n-1, 1)\cup\{(H(2n), H'(2n)\}$ կամ $G\subseteq K^*_{n,n}$, որտեղ $n=[p/2]$։

### ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ф. Харари*, Теория графов, Мир, М., 1973. [2] *R. Häggkvist*, *R. I. Faudree*, *R. H. Schelp*, Ars Combin., v. 11, p. 37—49 (1981). [3] *С. Х. Дарбинян*, ДАН АрмССР, т. 75, № 4 (1982). [4] *С. Х. Дарбинян*, ДАН АрмССР, т. 82, № 1 (1986). *C. Thomassen*, Proc. London Math. Soc., (3), 42, 231—251 (1981).